MATEMÁTICA UNIVERSITARIA:

Conceptos y Aplicaciones Generales Volumen 2

Ana Patricia Ramírez V.
Juan Carlos Cárdenas A.

MATEMÁTICA UNIVERSITARIA:

Conceptos y Aplicaciones Generales

Volumen 2 (1ª edición revisada)

Ana Patricia Ramírez V.
Juan Carlos Cárdenas A.
(Mayo 2012)

Contenido temático:

1. Matrices

- Definición y operaciones básicas
- Determinantes
- Sist. de ecuaciones: Método de Cramer
- Sist. de ecuaciones: Métodos de Gauss
- Matriz Inversa y Sist. de ecuaciones

2. Función Exponencial y Logarítmica

- Definiciones
- Propiedades de los logaritmos
- Ecuaciones exponenciales
- Ecuaciones logarítmicas
- Desigualdades no-lineales
- Interés compuesto: aplicación

3. Funciones trigonométricas

- Conceptos básicos
- Razones trigonométricas
- Triángulos rectángulos
- Aplicación de los triángulos rectángulos
- Identidades trigonométricas
- Círculo trigonométrico
- Ecuaciones trigonométricas

4. Introducción al Cálculo

- Interpretación de límites en gráficas
- Interpretación de límites en forma analítica

Prefacio al estudiante

He aquí algunas sugerencias para iniciar este curso y terminarlo con éxito:

- Lea el material antes de cada clase. Si usted conoce de la materia que se verá en clase y lo que contiene el libro, podrá ocupar más tiempo en escuchar y comprender la exposición del profesor.
- Después de la clase reescriba sus notas mientras vuelve a leer el tema tratado, remarcando los conceptos adicionales que parezcan útiles. Resuelva los ejercicios asignados cada lección.
- Si algo le confunde es aconsejable que consulte a su profesor antes de atrasarse. En ese caso lleve sus tentativas de solución a los ejercicios para que el profesor ubique con claridad sus puntos problemáticos.

Trate de cumplir estas 5 Reglas de Oro:

1. ¡NO SE ATRASE! El curso es muy rápido y recuperar el tiempo perdido resulta muy difícil.
2. ¡NO FALTE A CLASES! Para cumplir con el punto anterior no falte a la clase, la mayoría de los temas tienen relación con el anterior. Al faltar, puede que usted se sienta perdido y desmotivado, y tal vez hasta necesite recurrir a un tutor externo.
3. ¡RESUELVA MUCHOS PROBLEMAS! Todo necesita práctica y los problemas le ayudarán a descubrir los puntos que aún no tiene claros. Para ayudarlo con este punto su profesor le asignará ejercicios semanales de tarea. Hágalos a conciencia y varias veces si es necesario.
4. ¡EVALUACIÓN CONTÍNUA! No falte a los quices semanales, además de ser parte de la calificación del curso, le ayudarán a entrenarse para los exámenes (vencer los nervios). Los quices son una herramienta tanto para usted como para su profesor, para analizar en qué puntos no está clara la materia, y qué partes debe repasar.
5. ¡CREA EN USTED! Todos podemos aprender y quitarnos esas fobias, no piense que la matemática es difícil, si le costó durante su época colegial, no necesariamente pasará igual en la Universidad. Hay que considerar que muchos temores no s los infunden en los años que somos más susceptibles, la niñez o la adolescencia. Ahora usted es un estudiante universitario y su futuro está en sus manos…piense que puede y ¡podrá!

INTRODUCCIÓN

¿Qué son las matemáticas? Durante siglos, matemáticos y filósofos han tratado de dar una respuesta simple a esta pregunta aparentemente simple. Un filósofo podría decir que las matemáticas son un lenguaje, mientras que los defensores de la lógica podrían decir que las matemáticas son una extensión de la lógica misma.

La mayoría de los conceptos matemáticos básicos tienen sus raíces en las situaciones físicas que los hombres encaran en su vida diaria. Por ejemplo, uno de los conceptos más primitivos y básicos de todos es el de contar. Al mismo tiempo este concepto es la raíz de otros conceptos tan abstractos como el número y la aritmética.

Así por ejemplo, dos piedras y tres piedras son cinco piedras, lo que nos conduce a una proposición más general: dos cosas y tres cosas son cinco cosas, es decir:

$$2 + 3 = 5$$

La habilidad del hombre para formular conceptos relacionados con la experiencia física en proporciones abstractas, breves y concisas de este tipo, ha sido la base para el desarrollo de una civilización fundada en la comprensión de su medio ambiente.

Los antiguos mercaderes árabes desarrollaron una notación conveniente y sistemática como una ayuda para conservar la cuenta de sus bienes. Los antiguos egipcios desarrollaron muchas de las ideas fundamentales de trigonometría para poder determinar los límites de las propiedades después de los desbordamientos del río Nilo. Isaac Newton fue inducido a considerar los conceptos fundamentales del tema llamado ahora cálculo para describir la conducta de los objetos en movimiento.

Como vemos, estos conceptos han sido el resultado de la necesidad de determinar algo y como un suplemento a nuestro lenguaje ordinario.

PRODUCTOS ESPECIALES
Y
FORMULAS DE FACTORIZACION

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

LEYES DE POTENCIAS

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

INDICE

1. MATRICES	1
1.1 Algebra de Matrices	1
1.2 Determinantes	10
1.3 Sistemas de Ecuaciones: Regla de Cramer	19
1.4 Sistemas de Ecuaciones: Métodos de Gauss	22
1.5 Matriz Inversa	28
1.6 Sistemas de Ecuaciones: Método de Matriz Inversa	31
2. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA	34
2.1 Funciones y ecuaciones exponenciales	34
2.2 Funciones y ecuaciones logarítmicas	39
3. INTERÉS COMPUESTO	55
3.1 Concepto básico: Interés	55
3.2 Interés compuesto	55
3.3 Interés compuesto en forma continua	56
4. TRIGONOMETRÍA	63
4.1 Conceptos básicos	63
4.2 Cálculo de funciones trigonométricas y valores de ángulos	67
4.3 Triángulos rectángulos	71
4.4 Problemas de aplicación usando triángulos rectángulos	73
4.5 Identidades trigonométricas	81
4.6 Círculo trigonométrico	86
4.7 Ecuaciones trigonométricas	89
5. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO	93
5.1 Interpretación gráfica de límites	93
5.2 Interpretación analítica de límites	100

1. MATRICES

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J.J. Sylvester. El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en 1853. En 1858, A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas.

Las Matrices son arreglos de números formados por filas y columnas. Sirven para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales, también se emplean en la solución de problemas de Transporte y problemas de comunicación, en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc.

La utilización de matrices, conocidas también como "***arrays" (arreglos)***, constituye actualmente una parte esencial en los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos.

Es muy común en Ingeniería que se presenten problemas que involucren matrices en su resolución, los métodos matriciales para distintos tipos de problemas en ingeniería y ciencias han proliferado mucho, se explica cómo utilizar una herramienta como el Matlab en el cálculo de operaciones con matrices.

1.1 Álgebra de matrices.

Definición de matriz: Se le llama ***matriz*** a todo conjunto rectangular de elementos. El tamaño u orden de la matriz se indica señalando el número de filas por el número de columnas que la conforman, es decir, ***m*×*n***. En otras palabras, los elementos "a_{ij}" que forman la matriz, están dispuestos en ***m*** líneas horizontales (filas) y ***n*** verticales (columnas), tal que:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz es un arreglo de números:

$$A=\begin{bmatrix} 9 & -7 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & -8 \\ -1 & 11 & 13 & 15 \\ 10 & 12 & -2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Orden o tamaño de la matriz: ***m*×*n***, donde:

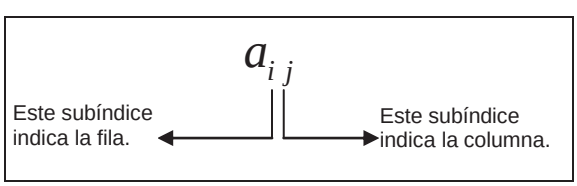
m = # de filas

n = # de columnas

a_{24} = elemento ubicado en la (fila 2, columna 4) de la matriz ***A.***

Note el uso de la nomenclatura: a_{ij} → "***j***" indica el número de columna; "***i***" indica el número de fila

En otras palabras



Del esquema anterior, entendemos que los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila "***i***" y el segundo la columna "***j***". Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento ubicado en la intersección de la fila 2 y columna 5 (*note que el conteo de las filas y columnas se inicia desde la esquina superior izquierda de la matriz, hacia abajo y hacia la derecha, respectivamente*).

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

TIPOS DE MATRICES

A continuación se indican los tipos de matrices más comunes que nos podemos encontrar:

<table>
<tr>
<td>Matriz fila: tiene una sola fila, 1×m
$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$
Orden = 1x4</td>
<td>Matriz columna: tiene una sola columna, m×1
$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ Orden = 3x1</td>
</tr>
<tr>
<td>Matriz cuadrada: aquella con igual número de filas y columnas, es decir m=n
$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ Orden = 3x3</td>
<td>Matriz nula: todos los elementos son 0
$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Orden = 2x2</td>
</tr>
<tr>
<td>Matriz diagonal: matriz cuadrada donde los elementos fuera de diagonal principal valen 0.
$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Orden = 3x3</td>
<td>Matriz escalar: matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales.
$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Orden 3x3</td>
</tr>
<tr>
<td>Matriz identidad: matriz escalar en donde los elementos de la diagonal principal valen 1.
$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td>Matriz transpuesta: aquella que resulta de cambiar las filas por las columnas, o viceversa. Toda matriz tiene su transpuesta y es única.
$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
</table>

Para que dos matrices sean iguales cada entrada de la primera matriz tiene que ser igual a su correspondiente en la segunda matriz.

TRANSPOSICIÓN DE MATRICES

Dada una matriz de orden ***m*×*n***, A = (a_{ij}), se llama ***matriz transpuesta de A***, y se representa por A^T, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz ***A***. De la definición se deduce que si ***A*** es de orden ***m*×*n***, entonces A^T es de orden ***n*** × ***m***. Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición de matrices

- Dada una matriz A, siempre existe su transpuesta y además es única.
- $\left(A^T\right)^T = A$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

OPERACIONES CON MATRICES

Se estudian tres tipos de operaciones con las matrices:

- Suma de matrices: se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en cada matriz.
- Producto de un número real por una matriz: se obtiene multiplicando cada uno de los elementos por ese número.
- Multiplicación de matrices: se obtiene multiplicando cada una de las filas de la 1ª matriz por cada una de las columnas de la segunda.

Suma y diferencia de matrices

La suma de dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, del mismo tamaño, es otra matriz $\boldsymbol{S}$ de la misma dimensión que los sumandos. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener el mismo tamaño.

En el siguiente caso, la suma de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se denota por $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. En este caso ambas matrices son de 2x3, por lo tanto la matriz resultan $\boldsymbol{S}$ tendrá también un tamaño de 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 5+5 & 7+2 \\ 2+7 & 3+0 & 9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 9 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

- A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa)
- A + B = B + A (propiedad conmutativa)
- A + N = A (N es la matriz nula)
- La matriz –A, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A.

La diferencia de matrices A y B se representa por A–B, y se define como: A–B = A + (–B)

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 5-5 & 7-2 \\ 2-7 & 3-0 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un número (escalar)

El producto de una matriz $\boldsymbol{A}$ por un número real k es otra matriz $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ de la misma dimensión que $\boldsymbol{A}$ y tal que cada elemento $\boldsymbol{b_{ij}}$ de $\boldsymbol{B}$ se obtiene multiplicando $\boldsymbol{a_{ij}}$ por $\boldsymbol{k}$, es decir,

$$\boldsymbol{b_{ij} = k \cdot a_{ij}}.$$

Ejemplo: Se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar.

$$B = 4 \cdot A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 0 & 4 \times 7 \\ 4 \times -2 & 4 \times 3 & 4 \times 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 28 \\ -8 & 12 & 36 \end{bmatrix}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

Para las siguientes propiedades, considere los términos ***k*** y ***h*** como valores que perteneces al conjunto de los números reales, y los términos ***A*** y ***B*** como matrices del mismo tamaño. De esta forma se cumple que:

- $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$ (propiedad distributiva 1ª)
- $(k+h)\cdot A=k\cdot A+h\cdot A$ (propiedad distributiva 2ª)
- $K\cdot[h\cdot A]=(k\cdot h)\cdot A$ (propiedad asociativa mixta)
- $1\cdot A=A$ (elemento unidad)

Operaciones combinadas

Se puede tener dentro de una operación varios productos escalares, suma, resta y transpuesta. Sean:

Ejemplo 1.1: Calcule la matriz $E=2\cdot(A-3\cdot B)+C^T$, utilizando las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 7 & 9\end{bmatrix}$$

$E=2\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 7 & 9\end{bmatrix}^T$	Se respeta la jerarquía operacional y se hace la transpuesta. A la izquierda se muestra el planteamiento con las matrices dadas.
$E=2\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 7 & 9\end{bmatrix}^T$	Se respeta la jerarquía operacional y se hace la transpuesta. A la izquierda se muestra el planteamiento con las matrices dadas.
$E=2\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 15 & 6\\ 21 & 0 & -6\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ -2 & 3 & 9\end{bmatrix}$	Aquí la matriz B se ha multiplicado por -3, y se ha desarrollado la transpuesta de C.
$E=2\cdot\begin{bmatrix}-5 & -10 & 1\\ -19 & 3 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ -2 & 3 & 9\end{bmatrix}$	Se desarrolla la resta de las matrices del paréntesis cuadrado.
$E=\begin{bmatrix}-10 & -20 & 2\\ -38 & 6 & 30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ -2 & 3 & 9\end{bmatrix}$	Aquí se ha multiplicado por 2 el resultado de la resta.
$E=\begin{bmatrix}-9 & -20 & 9\\ -40 & 9 & 39\end{bmatrix}$	Se hace la suma

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

1) Para las matrices mostradas A y B, calcule las operaciones indicadas:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

a) A-$2B$ R/ $A-2B=\begin{bmatrix}-3 & -5 & 3\\ -12 & 3 & 13\end{bmatrix}$

b) $4A$-$3B$ R/ $4A-3B=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 22\\ -13 & 12 & 42\end{bmatrix}$

2) Para las matrices indicadas A y B, calcule las expresiones indicadas:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 7 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

a) $A+2B$ R/ $A+2B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 2\\ 7 & 11 & 2\end{bmatrix}$

b) $\left[-2\left(A-4B\right)\right]+A^T$ R/ $\left[-2\left(A-4B\right)\right]+A^T=\begin{bmatrix}9 & -1 & -25\\ -4 & -21 & 15\\ 23 & 2 & -2\end{bmatrix}$

3) Calcule la operación indicada sabiendo que las matrices A, B y C son:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

a) $\left[2\left(A-3B\right)\right]+C$ R/ $\left[2\left(A-3B\right)\right]+C=\begin{bmatrix}6 & 11 & -20\\ -11 & -3 & 15\\ 7 & -21 & -4\end{bmatrix}$

4) Calcule las operaciones indicadas para las matrices A y B mostradas:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & a\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & a\\ -1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}$$

a) $A-2B^T$ R/ $A-2B^T=\begin{bmatrix}-5 & 5 & a+6\\ 1-2a & 7 & 4\end{bmatrix}$

b) $3(A^T-2B)$ R/ $3(A^T-2B)=\begin{bmatrix}-15 & 3(1-2a)\\ 15 & 21\\ 3(a+6) & 12\end{bmatrix}$

5) Calcule la operación indicada sabiendo que las matrices A, B y C son:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{4} & 2\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{3} & 1\\ 3 & 0 & -1\\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 2\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 2 & 3\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\end{bmatrix}$$

a) $-A-2(B-2C)$ R/ $-A-2(B-2C)=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & -\frac{5}{3}\\ -\frac{14}{3} & \frac{33}{4} & 12\\ -1 & \frac{10}{3} & -8\end{bmatrix}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Producto de matrices

Para que dos matrices puedan multiplicarse, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz. El resultado será una tercera matriz, cuyo tamaño corresponderá al número de filas de la primera matriz por el número de columnas de la segunda matriz.
Sean las dos matrices $\boldsymbol{A}$ y B indicadas, cuyos tamaños se indica debajo de ellas:

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

(3 x 3) **(3 x 2)**

REQUISITO

TAMAÑO DE AxB

Para realizar la operación de $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}$, verificamos primero el requisito y luego el tamaño de la resultante:

- Requisito: (número de columnas de $\boldsymbol{A}$) = (número de filas de $\boldsymbol{B}$), lo cual se cumple.
- Tamaño de R =(número de filas de $\boldsymbol{A}$) × (número de columnas de $\boldsymbol{B}$), es decir, 2 x 3.

$$\Rightarrow A\times B=R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\end{bmatrix}$$ donde $\boldsymbol{r_{ij}}$ = suma de los productos, término a término, de la fila "$\boldsymbol{i}$" por la fila "$\boldsymbol{j}$"

Note entonces que para obtener el resultado, los cálculos serían:

$$R=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ -1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, calcule el producto de estas.

$$\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot-1+3\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot-2+3\cdot1 & 1\cdot-2+2\cdot-7+3\cdot2\\ 4\cdot1+5\cdot-1+6\cdot0 & 4\cdot3+5\cdot-2+6\cdot1 & 4\cdot-2+5\cdot-7+6\cdot2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -10\\ -1 & 8 & -31\end{bmatrix}$$

Debe hacerse hincapié, que a diferencia de la multiplicación algebraica, la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, A x B ≠ B x A. Claro está, hay casos especiales que por el contenido de las matrices, si se puede dar esta igualdad, pero esto es la excepción, no la regla. Veamos el siguiente caso, con las matrices C y D:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad D=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 7 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

a) $$C\times D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 7 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -18 & 8 & -7\\ 6 & -16 & -2\end{bmatrix}$$

b) $$D\times C=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 7 & 0 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}=\nexists$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Al igual que en el caso de $\boldsymbol{A}$ x $\boldsymbol{B}$ anterior, para llegar a $\boldsymbol{C}$ x $\boldsymbol{D}$ se siguió el siguiente proceso:

Ejemplo 1.2: Calcule el producto de matrices indicado: $C \times D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	Se multiplica el 1er elemento de la fila 1 de C, por cada uno de los elementos de la columna 1 de D.
$C \times D = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot -1+-3\cdot 7 & 1\cdot -4+2\cdot 6+-3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 3+-3\cdot 5 \\ 4\cdot 5+0\cdot -1+-2\cdot 7 & 4\cdot -4+0\cdot 6+-2\cdot 0 & 4\cdot 2+0\cdot 3+-2\cdot 5 \end{bmatrix}$	Estos productos se suman, como se muestra a la izquierda. Ahora se multiplica el 2do elemento de la fila 1 de C por cada uno de los elementos de la columna 1 de D, y así sucesivamente, sin olvidar sumar estos productos. De esta forma se obtiene el valor de cada elemento del resultado.
$C \times D = \begin{bmatrix} -18 & 8 & -7 \\ 6 & -16 & -2 \end{bmatrix}$	La matriz resultante es de tamaño 2X3 (filas de C x columnas de D)

Propiedades del producto de matrices

1. A×(B×C) = (A×B) ×C
2. El producto de matrices en general no es conmutativo.
3. Dada una matriz cuadrada A de orden $\boldsymbol{n}$, no siempre existe otra matriz B tal que A×B = B×A = Identidad. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1}
4. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir:

$$A\times (B + C) = A\times B + A\times C$$

Consecuencias de las propiedades

1. Si A×B= 0 no implica que A=0 ó B=0.
2. Si A×B=A×C no implica que B = C.
3. En general, A×B ≠ B×A

Ejemplo 1.3: Utilizando el concepto de multiplicación de matrices, encuentre el valor de las variables $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, según la operación mostrada: $\begin{bmatrix} 6 & a & b & c \\ 2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 6\cdot 7+4\cdot a+3\cdot b+9\cdot c & -6+0\cdot a-2\cdot b+c & 6\cdot 6+1\cdot a+5\cdot b+0\cdot c \\ 14+0-12+27 & -2+0+8+3 & 12+0-20+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix}$	Se desarrolla la multiplicación de matrices a la izquierda de la ecuación. Lo que se pretende es comparar los términos de la matriz resultante de la izquierda, con los de la matriz de la derecha. Para que se cumpla la igualdad, se deben igualar estos términos.
$\begin{bmatrix} 42+4a+3b+9c & -6+0-2b+c & 36+a+5b \\ 29 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix}$	La matriz resultante a la izquierda también debe ser del mismo tamaño de la de la derecha, es decir, de tamaño 2x3

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

$\begin{cases} 42+4a+3b+9c=12 \\ -6+0a-2b+c=-1 \\ 36+a+5b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+3b+9c=-30 \\ 0a-2b+c=5 \\ a+5b+0c=-35 \end{cases}$	Se igualan los términos de acuerdo a la posición, es decir, el elemento a_{11} se iguala con el b_{11}, y así sucesivamente. Para la fila 1 en ambas matrices, se forma el sistema de ecuaciones 3x3 mostrado a la izquierda.
$a=-360 \quad x=29$ $b=65 \quad y=9$ $c=135 \quad z=-8$	Resolviendo el sistema de ecuaciones en forma simultánea obtenemos los primeros 3 resultados. El mismo proceso se sigue para x, y, z.

Ejercicios de Práctica

Realice las operaciones indicadas con las matrices A, B, C y D:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&3&2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&5\\0&1&2\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}-1&0&2\\3&2&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

6) $B\times C$ R/ $B\times C=\begin{bmatrix}4&8&2\\1&3&13\end{bmatrix}$

7) $C\times D$ R/ $C\times D=\begin{bmatrix}6&3&1\\0&9&7\\1&4&2\end{bmatrix}$

8) $\big(-2(A-B)\big)\times(3C+2D)$ R/ $\big(-2(A-B)\big)\times(3C+2D)=\begin{bmatrix}18&54&50\\-28&-66&-52\end{bmatrix}$

9) $\big(3(A+B)\big)\times(2C-D)$ R/ $\big(3(A+B)\big)\times(2C-D)=\begin{bmatrix}30&51&-27\\3&51&165\end{bmatrix}$

Realice la multiplicación A x B de las matrices indicadas. Los resultados quedan en función de las variables:

10) $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&a&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a&-1&3\\a&3&a\\1&0&2\end{bmatrix}$ R/ $A\times B=\begin{bmatrix}4a&0&a+9\\a^2-1&3a&a^2-2\end{bmatrix}$

11) $A=\begin{bmatrix}3&-1&8\\0&2&-4\\-x&6&7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7&-1\\0&3\\a&-2\end{bmatrix}$ R/ $A\times B=\begin{bmatrix}21+8a&-22\\-4a&-2\\7a-7x&x+4\end{bmatrix}$

12) $A=\begin{bmatrix}-1&7\\3a&5\\10&-a\\-5&12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2a&1&0\\5&-3&a\end{bmatrix}$ R/ $A\times B=\begin{bmatrix}-2a+35&-22&7a\\6a^2+25&3a-15&5a\\15a&10+3a&-a^2\\-10a+60&-41&12a\end{bmatrix}$

13) $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&a&-2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\a&3&a\\1&4&2\end{bmatrix}$ R/ $A\times B=\begin{bmatrix}4-a&-5&6-a\\4+a^2&-11+3a&5+a^2\end{bmatrix}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Realice las operaciones indicadas con las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$:

Para: $A=\begin{bmatrix}3&-4\\-2&1\\3&-3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-5&4\\2&-7\\-1&-2\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}3&-2&3\\-4&1&-3\end{bmatrix}$

14) $F=2(D-3B)\times(2A+C)$ R/ $F=\begin{bmatrix}-28&14\\24&-50\end{bmatrix}$

15) $F=-2(B-2D)\times(C-A)$ R/ $F=\begin{bmatrix}-152&152\\160&-152\end{bmatrix}$

Para: $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\5&7&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-3&2&-1\\0&4&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-1&-2&-7\\0&1&2\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&0&4\\7&5&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

16) $E=2(A-B)\times(3C-D)$ R/ $E=\begin{bmatrix}48&132&44\\-40&24&-226\end{bmatrix}$

Para: $A=\begin{bmatrix}-1&3&5&a\\1&-4&3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-1&4\\a&1&-3\\2&1&4\\1&-2&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&-1&-3\\a&-2&-1\end{bmatrix}$

17) $F=(A\times B)-(2C)$ R/ $F=\begin{bmatrix}5+4a&11-2a&13+3a\\9-6a&-2&36\end{bmatrix}$

18) Hallar los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ si:

$$\begin{bmatrix}6&a&b&c\\2&0&-4&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7&-1&6\\4&0&1\\3&-2&5\\9&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&-8&37\\x&y&z\end{bmatrix}$$

R/ $a=-4$ $x=29$ $b=1$ $y=9$ $c=0$ $z=-8$

19) Hallar los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ si:

$$\begin{bmatrix}-1&a&b&c\\2&4&-1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&-1&0\\1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&y&z\end{bmatrix}$$

R/ $a=1$ $x=9$ $b=-1$ $y=9$ $c=0$ $z=10$

20) Hallar los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ si:

$$\begin{bmatrix}a&b&c&d\\1&4&9&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&6&6\\1&9&8&4\end{bmatrix}$$

R/ $a=1$ $b=6$ $c=0$ $d=-2$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

1.2 Determinante de una matriz cuadrada

Definición de determinante:
Para cada matriz cuadrada hay asociado un valor llamado ***determinante*** de la matriz y se representa por |A| o det(A).
Dentro de las principales aplicaciones de los determinantes están el cálculo de inversa, sistemas de ecuaciones, el cálculo de áreas y volúmenes.

Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta: $\det(A)=\det(A^T)$
2. Si en un matriz se cambian entre sí dos líneas, su determinante cambia de signo.
3. Si una matriz que tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante valdrá 0
4. Si una matriz tiene todos los elementos de una línea nulos, su determinante valdrá 0
5. Si una línea de A es multiplicada por un escalar "c", creando B, entonces $\det(B)=c\cdot\det(A)$
6. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas: $\det(A\times B)=\det(A)\cdot\det(B)$

DETERMINANTE DE MATRICES DE 2DO ORDEN:

Para una matriz de segundo orden, es decir, de tamaño 2x2, el cálculo del determinante se puede realizar de la siguiente forma:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=(a_{11}\cdot a_{22})-(a_{12}\cdot a_{21})$$

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

El determinante sería: $\det(A)=(1\cdot -3)-(-1\cdot 2)=-3+2=-1$

DETERMINANTE DE MATRICES DE 3ER ORDEN:

Para una matriz de tercer orden, es decir, de tamaño 3x3, el cálculo del determinante se puede realizar usando la regla de Sarrus.

Regla de Sarrus

Siendo A una matriz cuadrada de 3er orden, su determinante será la suma de los productos de los elementos que forman las "*diagonales que van de arriba hacia abajo*" (↘), y se le resta la suma de los productos de elementos que forman las "*diagonales que van de abajo hacia arriba*" (↗).
El siguiente esquema pretende explicar más claramente este planteamiento:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}}_{\text{Se copian las 2 primeras columnas al final de la matriz, para facilitar los cálculos.}}$$

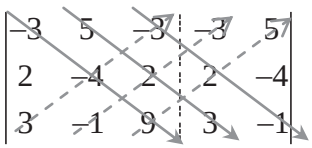
$$\Rightarrow\quad \det(A)=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})$$

Como se puede ver en el esquema, para facilitar lo planteado por la Regla de Sarrus, antes de hacer los cálculos se deben copiar las 2 primeras columnas al final de la matriz, lo cual facilita visualizar las diagonales mencionadas.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 5 & -3\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 9\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(A)=\begin{vmatrix}-3 & 5 & -3\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 9\end{vmatrix}$$



$$\det(A)=\underbrace{\left[(-3\cdot-4\cdot 9)+(5\cdot 2\cdot-3)+(-3\cdot 2\cdot-1)\right]}_{\text{Diagonales de arriba hacia abajo }(\searrow)}-\underbrace{\left[(3\cdot-4\cdot-3)+(-1\cdot 2\cdot-3)+(9\cdot 2\cdot 5)\right]}_{\text{Diagonales de abajo hacia arriba }(\nearrow)}$$

$$\det(A)=[108+30+6]-[90+6+36]$$

$$\det(A)=144-132 \qquad\Rightarrow\qquad \det(A)=12$$

Ejercicios de Práctica

Calcule el determinante de las matrices que se muestran a continuación

21) $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-26$

22) $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & -5\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -6\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-95$

23) $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 7 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=11$

24) $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 9\\ -3 & 5 & -3\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=12$

25) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 2\\ 7 & 11 & 2\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-134$

26) $A=\begin{bmatrix}5 & -4 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 7 & 0 & 5\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-38$

27) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-20$

28) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 7 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=13$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

DETERMINANTE DE MATRICES DE 4º ORDEN Y MAYORES

Para una matriz de cuarto orden, es decir, de tamaño 4x4 y mayores, el cálculo del determinante se realiza aplicando el Teorema de Expansión, pero para ello es indispensable introducir dos nuevos conceptos, llamados ***Menor*** y ***Cofactor***. Ambos conceptos están relacionados a una posición específica a_{ij} de la matriz, y no a la matriz misma. Note que aunque para la matriz de 3x3 hemos utilizado la Regla de Sarrus para calcular su determinante, también lo podemos calcular utilizando el Teorema de Expansión

Definiciones Básicas

Matriz menor

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una submatriz M_{ij} que recibe el nombre de matriz ***Menor*** del elemento a_{ij}. Esto quiere decir que dada la matriz A, suprimamos la fila 1 y columna 1 de dicha matriz:

$$A=\left[\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad M_{11}=\left[\begin{array}{ccccc} a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

Lo que se ha obtenido es la matriz ***Menor*** del elemento a_{11}. Como se aprecia, esta matriz resulta de suprimir en la matriz A la fila 1 y la columna 1. Es decir, si se requiere calcular, por ejemplo, el "menor de la posición a_{21}", al cual se le denominaría M_{21}, este sería el determinante de la matriz que se forma cuando se elimina fila 2 y la columna 1.

Cofactor

Se llama ***cofactor*** de a_{ij}, y se calcula por la fórmula $c_{ij} = (-1)^{i+j}$. Si usamos esta fórmula y construimos una matriz reflejando los signos de los resultados obtenidos para cada una de las posiciones de la matriz, tendríamos la matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc} + & - & + & ..... \\ - & + & - & ..... \\ + & - & + & ..... \\ . & . & . & ..... \end{array}\right]$$

con la cual podríamos fácilmente identificar el signo de los cofactores. Empezando siempre con positivo en la esquina superior, se van intercambiando los signos + y – hasta llegar a la posición de a_{ij}.
Otra forma es usar el signo + o - dependiendo si la suma de los subíndices da un resultado par o impar:

- Si $i+j$ = par → $c_{ij} = 1$
- Si $i+j$ = impar → $c_{ij} = -1$

Teorema de Expansión

Siendo A una matriz cuadrada de 3er orden o mayor, su determinante se calcula sumando los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus cofactores y menores respectivos. El cálculo se simplifica si se escoge una fila o columna con mayor cantidad de entradas nulas.
La formulación matemática sería:

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}\cdot c_{ij}\cdot M_{ij}\right)$$

donde: a_{ij} = elemento en la posición ij.
c_{ij} = cofactor de la posición ij.
M_{ij} = menor de la posición ij.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Para el cálculo respectivo se puede seguir entonces el siguiente procedimiento:

1. Elegir una de las filas o columnas para iniciar el desarrollo.
2. Calcular los cofactores c_{ij} y los menores M_{ij} de las posiciones de los elementos a_{ij} que forman la fila o columna seleccionada.
3. Se multiplican $a_{ij} \cdot c_{ij} \cdot M_{ij}$
4. Se suman todos los productos, lo cual da como resultado el determinante de la matriz.

Ejemplo 1.4: Calcule el determinante de la matriz 4x4 mostrada, $$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$	Se escoge la fila o columna con más ceros. En este caso puede ser la fila 1 o la columna 1. Para el ejemplo se escoge la fila 1.
$$\det(A) = a_{11} \cdot c_{11} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot c_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot c_{13} \cdot M_{13} + a_{14} \cdot c_{14} \cdot M_{14}$$	Planteando el Teorema de Expansión con fila 1
$$\det(A) = 0 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{M_{11}} + 1 \cdot -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{M_{12}} +$$ $$3 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{M_{13}} + -1 \cdot -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{M_{14}}$$ Calculando por aparte el resultado de los menores: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$$	Note que a_{11}=0, lo que ahorra el cálculo del M_{11}. Los otros menores se calculan y se sustituyen en la ecuación del det(A). Recuerde el cálculo de los menores no es ni más ni menos que el cálculo de determinantes, en este caso de matrices de 3x3, por lo que se utiliza la Regla de Sarrus para calcularlos.
$$\det(A) = 0 + 1 \cdot -1 \cdot 13 + 3 \cdot 1 \cdot 20 + -1 \cdot -1 \cdot 12$$ $$\det(A) = 0 - 13 + 60 + 12$$	Se multiplican los determinantes por el signo y el elemento correspondiente
$$\det(A) = 59$$	Resultado final

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ POR EL MÉTODO DE GAUSS

Transformaciones elementales

Son las transformaciones que podemos realizarle a una matriz sin que su rango varíe. Es fácil comprobar que estas transformaciones no varían el rango usando las propiedades de los determinantes

- Si se permutan o se intercambian 2 filas o 2 columnas el determinante varia de signo.
- Si se multiplica o divide una línea por un número no nulo se hace la operación contraria al determinante final.
- Si a una línea de una matriz se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número no nulo el determinante no varía.

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en aplicar las transformaciones elementales anteriores a una matriz con objeto de conseguir que los elementos que están por debajo de la diagonal principal se anulen, es decir, se conviertan en 0. A esto se le llama "triangularizar" una matriz. Para conseguirlo, se debe dejar en la diagonal principal elementos no nulos, salvo que la fila sea nula.
Ejemplos de matrices triangulizadas:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7 & 1 & 9\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

El cálculo de determinantes por el método de Gauss consiste en hallar un determinante equivalente (con el mismo valor) al que se pretende calcular, pero triangularizando la matriz. De esta forma el problema se reduce a calcular un determinante de una matriz triangular, cosa que es bastante fácil usando las propiedades de los determinantes.
Para conseguir triangularizar el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.
- Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo

Ejemplo 1.5: Calcule el determinante de la matriz 3x3 utilizando el Método de Gauss

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Se inicia haciendo nulos los elementos de la primer columna, excepto el que está en la diagonal. Para ello, en operaciones independientes, se multiplicará la fila 1 por -2, y se le suma a la fila 2; luego se multiplica la fila 1 por -1 y se le suma a la fila 3:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[-1\cdot F1+F3]{-2\cdot F1+F2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

Debe notarse que en la nueva matriz transformada, el elemento $a_{32} = 0$, por lo cual la triangularización queda completa. Si $a_{32} \neq 0$, se hubiera requerido una nueva transformación para completar la triangularización.

Finalmente, el determinante se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal de la matriz transformada, es decir, ya triangulizada:

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\right)=1\cdot 1\cdot -4 \quad\Rightarrow\quad \det(A)=-4$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 1.6: Calcule el determinante de la matriz 4x4 utilizando el Método de Gauss

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 6 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Se anulan todos elementos de la primera columna, excepto el que está en la diagonal. Note que sólo se requiere anular el elemento 6, para lo cual se multiplicará la fila 1 por -6, y se le suma a la fila 4:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 6 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{-6\cdot F1+F4} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -12\end{bmatrix}$$

Siguiendo el orden, se anulan los elementos de la segunda columna que están debajo del elemento diagonal. Se multiplicará la fila 2 por 1, y se le suma a la fila 3, y se multiplica la fila 2 por -1 y se le suma a la fila 4:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -12\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ 1\cdot F2+F3\\ -1\cdot F2+F4\\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{bmatrix}$$

Finalmente, el determinante se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal de la matriz transformada, es decir, ya triangulizada:

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{bmatrix}\right)=1\cdot 1\cdot -1\cdot -11 \quad \Rightarrow \quad \det(A)=11$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 1.7 (técnica alternativa): Calcule el determinante de la matriz 4x4 mostrada:

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Se muestra otra metodología, usando el principio de seleccionar la fila o columna con mayores entradas nulas, y combinándola con el cálculo de determinantes por el Método de Gauss.

Se transforma la matriz original, multiplicando la columna 1 por 2 y sumando a la columna 2; volvemos a multiplicar la columna 1 por -1 y sumando a la columna 3; finalmente se multiplica la columna 1 por -3 y sumamos a la columna 4:

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Se inicia el cálculo por la fila 1, que es la que tiene más ceros. Se aplica el principio del Teorema de Expansión que dice $a_{ij}\cdot c_{ij}\cdot M_{ij}$:

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=a_{11}\cdot c_{11}\cdot M_{11}+0+0+0=1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 4 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

En el caso del M_{11}, se calcula utilizando el método de Gauss, para lo cual requerimos triangularizar la matriz:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 4 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xrightarrow[\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot F1+F3]{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot F1+F2}\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & -2 & -\frac{21}{2}\\ 0 & -4 & -\frac{13}{2}\end{vmatrix}\xrightarrow{(-2)\cdot F2+F3}\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & -2 & -\frac{21}{2}\\ 0 & 0 & \frac{29}{2}\end{vmatrix}$$

Una vez triangulizada la matriz, multiplicamos los elementos de su diagonal, y el resultado es el valor correspondiente a M_{11}:

$$M_{11}=2\cdot -2\cdot\frac{29}{2}=-58$$

Finalmente se sustituye el valor de M_{11} encontrado, en la expresión original del determinante de B:

$$\det(B)=a_{11}\cdot c_{11}\cdot M_{11}=1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 4 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot -58\quad\Rightarrow\quad\det(B)=-58$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

Calcule el determinante de las matrices que se muestran a continuación utilizando tanto el método general como el método de Gauss

29) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=60$

30) $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-13$

31) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-39$

32) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=120$

33) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=54$

34) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-144$

35) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-36$

36) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & -7 & 8 & -1 \\ 7 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-240$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

37) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=59$

38) $A=\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=560$

39) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=-254$

40) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=6$

41) $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=0$

42) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=24$

43) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ R/ $\det(A)=20$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

1.3 Sistemas de Ecuaciones: Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de forma tradicional así:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Como se aprecia, tiene "***m***" ecuaciones y "***n***" incógnitas, donde:

- a_{ij} son números reales, llamados coeficientes del sistema,
- b_m son números reales, llamados términos independientes del sistema,
- x_j son las variables del sistema,

La solución del sistema es un conjunto ordenado de números reales ($s_1, s_2, \ldots, s_n$) tales que al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se verifican a la vez las "***m***" ecuaciones del sistema. Este mismo sistema de ecuaciones lineales en notación matricial tiene esta forma:

$$A\cdot X = B \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{términos} \\ \text{independientes}}}$$

Una aplicación de los determinantes es calcular la solución de un sistema de ecuaciones con ***n*** incógnitas. La solución para cualquiera de las incógnitas viene dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene a partir de ***A***, sustituyendo los elementos de la columna ***i***, por los elementos del vector de resultados

Por ejemplo, un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas se escribiría matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{términos} \\ \text{independientes}}}$$

Por lo tanto las soluciones, según la Regla de Cramer, vendrían dadas por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta}$$

En todos los casos, note que el denominador consiste en el determinante de la matriz de coeficientes, es decir:

$$\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 1.8: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado.

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ x+y-3z=4 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$$

Con el "solucionador de ecuaciones" de la calculadora, puede corroborar los resultados.

$$A\cdot X=B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{términos} \\ \text{independientes}}}$$

Se reescribe el sistema de ecuaciones en forma matricial, de forma que se logran identificar las respectivas matrices y variables.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right|$$

$$\det(A)=(-2+27+8)-(12-12+3)=30 \quad \Rightarrow \quad \Delta=30$$

Se calcule el det(***A***), que se requiere para el cálculo de todas las soluciones.

$$\det(Ax)=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -3 & 4 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right|$$

$$\det(Ax)=(0+0+32)-(0+0+12)=20 \quad \Rightarrow \quad \Delta x=20$$

Ahora se cambia la 1ra columna de ***A*** por el vector ***B***, formando la matriz ***Ax***, a la cual se le debe calcular el determinante, es decir, el det(***Ax***), que se requiere para el cálculo de la solución ***x***.

$$\det(Ay)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right|$$

$$\det(Ay)=(-8+0+0)-(48+0+0)=-56 \quad \Rightarrow \quad \Delta y=-56$$

Ahora se cambia la 2da columna de ***A*** por el vector ***B***, formando la matriz ***Ay***, a la cual se le debe calcular el determinante, es decir, el det(***Ay***), que se requiere para el cálculo de la solución ***y***.

$$\det(Az)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right|$$

$$\det(Az)=(0-36+0)-(0+16+0)=-52 \quad \Rightarrow \quad \Delta z=-52$$

Ahora se cambia la 3ra columna de ***A*** por el vector ***B***, formando la matriz ***Az***, a la cual se le debe calcular el determinante, es decir, el det(***Az***), que se requiere para el cálculo de la solución ***z***.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{20}{30} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-56}{30} \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-52}{30}$$

$$x=\frac{2}{3} \qquad y=-\frac{28}{15} \qquad z=-\frac{26}{15}$$

Se calculan las variables

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 1.9: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado. La variable x encuéntrela aplicando el método de Cramer. Para el resto de las variables use el solucionador de la calculadora.

$$\begin{cases} w+x+y+z=3 \\ 2x+3y=5 \\ 5y+8z=5 \\ 2x+y+w=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ 2x+3y+0z+0w=5 \\ 0x+5y+8z+0w=5 \\ 2x+y+0z+w=4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\text{Matriz X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}}$$

Lo primero que se debe hacer es reacomodar el sistema, ordenando las variables y dejando de un solo lado los términos independientes. De esta forma podremos reescribir el sistema en forma matricial.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{14} \cdot c_{14} \cdot M_{14} + 0 + 0 + a_{44} \cdot c_{44} \cdot M_{44}$$

$$\det(A) = 1 \cdot -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{M_{14}} + 0 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}}_{M_{44}}$$

donde: $M_{14} = 32$ y $M_{44} = 18$ (usando Regla de Sarrus)

$$\det(A) = 1 \cdot -1 \cdot 32 + 1 \cdot 1 \cdot 18 = -14 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -14$$

Se calcula el det(***A***). En este caso se utiliza el Teorema de Expansión, partiendo de la columna 4.
El cálculo de los menores M_{14} y M_{44} se puede realizar por la Regla de Sarrus, aunque el ejemplo no lo muestra.

$$\det(Ax) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{14} \cdot c_{14} \cdot M_{14} + 0 + 0 + a_{44} \cdot c_{44} \cdot M_{44}$$

$$\det(Ax) = 1 \cdot -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{M_{14}} + 0 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix}}_{M_{44}}$$

donde: $M_{14} = 56$ y $M_{44} = 42$ (usando Regla de Sarrus)

$$\det(Ax) = 1 \cdot -1 \cdot 56 + 1 \cdot 1 \cdot 42 = -14 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = -14$$

Ahora se cambia la 1ra columna de ***A*** por el vector ***B***, formando la matriz ***Ax***, a la cual se le debe calcular el determinante, es decir, el det(***Ax***), que se requiere para el cálculo de la solución ***x***. Igual que el caso anterior, se utiliza el Teorema de Expansión partiendo también de la columna 4. En el caso de los menores, su cálculo se realiza utilizando la Regla de Sarrus.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-14}{-14} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Se calcula la variable ***x***.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

$\begin{cases} 1+y+z+w=3 \\ 2+3y+0z+0w=5 \\ 0+5y+8z+0w=5 \\ 2+y+0z+w=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z+w=3-1 \\ 3y+0z+0w=5-2 \\ 5y+8z+0w=5 \\ y+0z+w=4-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z+w=2 \\ 3y+0z+0w=3 \\ 5y+8z+0w=5 \\ y+0z+w=2 \end{cases}$	Ahora se sustituye el valor de *x* en el sistema original de ecuaciones y se vuelve a reescribir.
$\begin{cases} y+z+w=2 \\ 3y+0z+0w=3 \\ 5y+8z+0w=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ z=0 \\ w=1 \end{matrix}$	Se obtienen 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Para utilizar el "solucionador" de la calculadora, se deben escoger 3 ecuaciones cualesquiera. Se calculan las variables

1.4 Sistemas de Ecuaciones: Métodos de Gauss

Utiliza lo que se llama "matriz aumentada", que no es más que la unión de A (matriz de coeficientes) y B (matriz de valores independientes). En otras palabras la matriz aumentada es:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]}_{\begin{array}{c}\text{Matriz de coeficientes A}\\ \text{unida a la}\\ \text{Matriz de términos indep. B}\end{array}}$$

Al solucionar sistemas de ecuaciones utilizando matrices aumentadas, lo que se busca es reducir estas matrices. Veremos 2 métodos que hacen esta reducción en forma muy similar:

- Método de Gauss (eliminación gaussiana): consiste en hacer que la matriz de coeficientes quede como una matriz escalonada
- Método de Gauss-Jordan: busca reducir la matriz de coeficientes a una matriz escalonada reducida.

En otras palabras, para un sistema de 3 ecuaciones 3 incógnitas, por ejemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\begin{array}{c}\text{Matriz de}\\ \text{incógnitas}\end{array}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\begin{array}{c}\text{Matriz de}\\ \text{términos}\\ \text{independientes}\end{array}}$$

Entonces las matrices escalonadas, según el método que se escoja, tendrán la siguiente configuración:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]}_{\begin{array}{c}\text{MATRIZ ESCALONADA:}\\ \text{bajo la diagonal TODOS los términos son 0}\end{array}} \qquad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]}_{\begin{array}{c}\text{MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA:}\\ \text{sobre y bajo la diagonal TODOS los términos son 0}\end{array}}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Para hacer estas reducciones, hay tres operaciones matemáticas válidas ÚNICAMENTE PARA LAS FILAS de las matrices aumentadas. Estas operaciones son similares a las utilizadas en el Método de Gauss para el cálculo de determinantes:

1- Multiplicar o dividir una fila por un número escalar diferente de cero.
2- Sumar o restar a una fila un múltiplo de otra,
3- Intercambiar (permutar) filas en la matriz.

Se muestra a manera de ejemplo, lo que es una matriz escalonada y una matriz escalonada reducida.

La matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 5x-3y=4 \end{cases} \text{ es } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

su matriz escalonada será

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 17/11 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

y su matriz escalonada reducida será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/11 \\ 0 & 1 & 17/11 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases} \text{ es } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

su matriz escalonada será

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 8 \\ 0 & 1 & -1/7 & 33/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

y su matriz escalonada reducida será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS (ELIMINACIÓN GAUSSIANA)

Ejemplo 1.10: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Matriz X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 24 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}}$$

Lo primero que se debe hacer es reacomodar el sistema, ordenando las variables y dejando de un solo lado los términos independientes. De esta forma podremos reescribir el sistema en forma matricial.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F1+F3]{-2\cdot F1+F2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

Se construye la matriz aumentada.
En este caso el método indicado implica calcular la matriz escalonada.
Los cálculos se empiezan anulando los términos de la columna 1.

$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{P(F2,F3)} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array}\right]$	Una vez anulados los términos de la columna 1, se puede pasar a anular los de la columna 2. Aún así en este caso, por conveniencia, se permutan las filas 2 y 3.
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array}\right] \xrightarrow{-3\cdot F2+F3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$ MATRIZ ESCALONADA!	Se continúa con la eliminación de términos, en este caso de la columna 2. Al hacer esto se llega directamente a la matriz escalonada deseado
$\begin{cases} x+y+z=11 \\ -y-2z=-9 \\ 5z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=5 \\ z=2 \end{array}$	Con la ayuda de la matriz escalonada, se construye el sistema de ecuaciones mostrado. Al resolver el sistema, se está resolviendo el sistema de ecuaciones original.

Ejemplo 1.11: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2y-2z=-2 \\ 3x-y+z=11 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{-3F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 0 & -13 & -18 & -19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{14}F_2} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -8 & -19 \end{array}\right] \xrightarrow{13F_2+F_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}F_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

MATRIZ ESCALONADA

De la matriz escalonada, se construye el sistema de ecuaciones y se resuelven las variables:

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ y+z=3 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{array}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Ejemplo 1.12: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3y = -2x + 11 \\ z - x = 2 - y \\ -3x - 3z = -2y + 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x+3y+0z=11 \\ -x+y+z=2 \\ -3x+2y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Matriz X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}}$	Lo primero que se debe hacer es reacomodar el sistema, ordenando las variables y dejando de un solo lado los términos independientes. De esta forma podremos reescribir el sistema en forma matricial.
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{P(F1,F2)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 11 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	Se pueden intercambiar filas. En este caso permutan fila 1 por fila 2, para ubicar favorablemente el neutro multiplicador.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 11 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\cdot F1+F2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 1 por 2 y se le suma a la fila 2, para anular los términos de la columna 1.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3\cdot F1+F3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 1 por -3 y se le suma a la fila 3, para anular el último término de la columna 1.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{P(F2,F3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \end{bmatrix}$	Se permutan fila 2 por fila 3, para ubicar de nuevo en posición favorable al neutro multiplicador.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\cdot F2+F1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 2 por 1 y se le suma a la fila 1, para anular los términos de la columna 2.
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{5\cdot F2+F3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 2 por 5 y se le suma a la fila 3, para anular el último término de la columna 2.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{28}\right)\cdot F3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Se multiplica por -1/28 la fila 3 para lograr el neutro multiplicativo y facilitar la anulación de términos en la columna 3.
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{6\cdot F3+F2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 3 por 6 y se le suma a la fila 2, para anular los términos de la columna 3.
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{5\cdot F3+F1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Se multiplica fila 3 por 5 y se le suma a la fila 1, para anular el último término de la columna 3.
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\cdot F2]{-1\cdot F1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1 \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=3 \\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=3 \\ z=0 \end{matrix}$	Se multiplica por -1 las filas 1 y 2, de forma que se llegue a la matriz identidad, y así poder reconstruir las 3 ecuaciones que dan el resultado final.

Ejemplo 1.13: Resuelva el sistema de ecuaciones mostrado por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x+7y+2z=-6 \\ 3x+5y=-12 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & 0 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{1\cdot F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & 0 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{-1\cdot F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & 0 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{-3\cdot F_1+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & 3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{9}\cdot F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 11 & 3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{2\cdot F_2+F1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 11 & 3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{-11\cdot F_2+F3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}\cdot F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot F_3+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot F_3+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1 \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=-3 \\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=-3 \\ z=7 \end{matrix}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando tanto el Método de Cramer como los Métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

44) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 4x+3y+2z=2 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases}$

$\Delta = -8$
$x = -\frac{1}{2}$
$y = 2$
R/ $z = -1$

45) $\begin{cases} 3y=-2x+11 \\ z-x=2-y \\ -3x-3z=-2y+3 \end{cases}$

$\Delta = -28$
$x = 1$
$y = 3$
R/ $z = 0$

46) $\begin{cases} a+b+2c=13 \\ a+2b=8 \\ a-b-3c=-13 \end{cases}$

$\Delta = -9$
$a = 2$
$b = 3$
R/ $c = 4$

47) $\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ 3x-2y-6z=7 \\ 5x+7y+8z=9 \end{cases}$

$\Delta = 14$
$x = 3$
$y = -2$
R/ $z = 1$

48) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+z=1 \\ 2x+y+3z=2 \end{cases}$

$\Delta = -1$
$x = -1$
$y = -5$
R/ $z = 3$

49) $\begin{cases} x+y-z+w=6 \\ 2x-y+7z=3 \\ 3x-7y+8z-w=-5 \\ 7x+2y-3z+w=7 \end{cases}$

$\Delta = -240$
$x = \frac{11}{48}$
$y = \frac{59}{120}$
R/ $z = \frac{13}{30}$
$w = \frac{457}{80}$

50) $\begin{cases} 2x+y-z+w=2 \\ x+y-2z=-1 \\ 2x+2y+3w=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

$\Delta = -6$
$x = \frac{7}{3}$
$y = -\frac{4}{3}$
$z = 1$
R/ $w = -\frac{1}{3}$

51) $\begin{cases} 2x+3y+4z=-1 \\ x+2z+2w=1 \\ -w+y+z=0 \\ 3x+y-2z-w=3 \end{cases}$

$\Delta = 9$
$x = 3$
$y = -5$
$z = 2$
R/ $w = -3$

52) $\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x-y+z-w=2 \\ -x+y+2z+w=-5 \\ 2y+z-w=3 \end{cases}$

$\Delta = 21$
$x = 2$
$y = 1$
$z = -1$
R/ $w = -2$

53) $\begin{cases} 4x+y+3z+4w=0 \\ 8x-3y=-10 \\ y-z=-2 \\ 2x+w+y=-2 \end{cases}$

$\Delta = -12$
$x = -\frac{1}{2}$
$y = 2$
$z = 4$
R/ $w = -3$

54) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \end{cases}$

$\Delta = -55$
$x = 2$
$y = 1$
R/ $z = -1$

55) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

$\Delta = -18$
$x = 2$
$y = 1$
R/ $z = -1$

56) $\begin{cases} 2x+5z=3y-3 \\ 2y+w=4z+2 \\ 3y-9=x+z \\ x-w=-2y \end{cases}$

$\Delta = -36$
$x = -2$
$y = 3$
$z = 2$
R/ $w = 4$

57) $\begin{cases} 3w+x+7y+9z=4 \\ w+x+4y+4z=7 \\ -w-2y-3z=0 \\ -2w-x-4y-6z=6 \end{cases}$

$\Delta = -1$
$x = -6$
$y = 10$
R/ $z = -7$
$w = 1$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

1.5 Matriz inversa

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es invertible o regular; en caso contrario recibe el nombre de singular.

Matriz inversa A^{-1}:
Se dice que una matriz B es inversa de otra matriz A si se cumple que $A \cdot B = I$, es decir, que el producto de las 2 matrices da como resultado la matriz identidad. La inversa de una matriz se simboliza por A^{-1}. Se puede calcular de 3 formas:

- A partir de la definición
- Por el método de reducción de Gauss
- Por determinantes

Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(M_{ADJ}\right)^T \qquad \text{donde:} \qquad M_{ADJ} = \begin{bmatrix} c_{11} \cdot M_{11} & c_{12} \cdot M_{12} & c_{13} \cdot M_{13} \\ c_{21} \cdot M_{21} & c_{22} \cdot M_{22} & c_{23} \cdot M_{23} \\ c_{31} \cdot M_{31} & c_{32} \cdot M_{32} & c_{33} \cdot M_{33} \end{bmatrix}$$

Siguiendo el desarrollo que propone la ecuación anterior, se deberían seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el determinante de la matriz, $\det(A)$.
2. Formar la matriz adjunta, M_{ADJ}, donde cada elemento es el producto del cofactor por el menor de la posición en estudio. Note que el tamaño de M_{ADJ} es el mismo que el tamaño de A.
3. Transponer la matriz M_{ADJ}, formando así la matriz $(M_{ADJ})^T$.
4. Multiplicar esta nueva matriz, la $(M_{ADJ})^T$, por el inverso del determinante, es decir $1/\det(A)$.

Propiedades de la inversión de matrices

- Una matriz es invertible si y sólo si el determinante de A es distinto de cero:
$$\det(A) \neq 0$$
- La matriz inversa, si existe, es única
- El producto de una matriz por su inversa, o viceversa, da como resultado la matriz identidad I:
$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$
- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas, pero cambiando el orden:
$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$
- Para una matriz dada, la inversa de su inversa da como resultado nuevamente la matriz original:
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
- Un escalar por una matriz, cuyo resultado se eleva a la -1, equivale a multiplicar el recíproco del escalar por la inversa de la matriz original:
$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$
- Si la matriz es invertible, también lo es su transpuesta, y el inverso de su transpuesta es la transpuesta de su inversa:
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

INVERSA DE UNA MATRIZ DE 2DO ORDEN

Ejemplo 1.14: Calcule la inversa de la matriz de 2x2

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

Se calcula el determinante de la matriz, para verificar que sea distinto de cero. De ser así, este dato se requiere más adelante en el cálculo de la inversa.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(1\cdot 3)-(4\cdot -2) \quad \Rightarrow \quad \det(A)=11$$

Se calcula la matriz de menores de A y se multiplica por los cofactores:

$$M_{ADJ}=\begin{bmatrix}c_{11}\cdot M_{11} & c_{12}\cdot M_{12}\\ c_{21}\cdot M_{21} & c_{22}\cdot M_{22}\end{bmatrix}$$

$$M_{ADJ}=\begin{bmatrix}1\cdot 3 & -1\cdot 4\\ -1\cdot -2 & 1\cdot 1\end{bmatrix}$$

Se transpone la matriz calculada anteriormente:

$$M_{ADJ}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (M_{ADJ})^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

Finalmente, se efectúa el cálculo de la matriz inversa según la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(M_{ADJ})^T=\left(\tfrac{1}{11}\right)\cdot\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{11} & \frac{2}{11}\\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ DE 3ER ORDEN EN ADELANTE

Ejemplo 1.15: Calcular la inversa de la matriz B:

$$B=\begin{bmatrix}-3 & 5 & -3\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 9\end{bmatrix}$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}-3 & 5 & -3\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 9\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}-3 & 5 & -3 & -3 & 5\\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 9 & 3 & -1\end{array}\right|$$

$$\det(B)=(108+30+6)-(90+6+36)=12$$

$$\det(B)=12$$

Primer requisito para calcular la inversa de B, es que su determinante sea distinto de cero. Se calcula con la Regla de Sarrus.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

$M_{ADJ} = \begin{bmatrix} c_{11}\cdot M_{11} & c_{12}\cdot M_{12} & c_{13}\cdot M_{13} \\ c_{21}\cdot M_{21} & c_{22}\cdot M_{22} & c_{23}\cdot M_{23} \\ c_{31}\cdot M_{31} & c_{32}\cdot M_{32} & c_{33}\cdot M_{33} \end{bmatrix}$ $M_{ADJ} = \begin{bmatrix} c_{11}\cdot M_{11} = (1)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} & c_{12}\cdot M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & c_{13}\cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ c_{21}\cdot M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} & c_{22}\cdot M_{22} = (1)\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & c_{23}\cdot M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ c_{31}\cdot M_{31} = (1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & c_{32}\cdot M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & c_{33}\cdot M_{33} = (1)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ $M_{ADJ} = \begin{bmatrix} -34 & -12 & 10 \\ -42 & -18 & 12 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	Se construye la matriz adjunta de B. Cada elemento de la matriz adjunta es el producto del cofactor por el menor de la posición del elemento. En la primera línea se muestra el planteamiento de M, en la segunda línea se muestra el planteamiento matemático, y finalmente en la tercera línea se muestran los resultados.
$M_{ADJ} = \begin{bmatrix} -34 & -12 & 10 \\ -42 & -18 & 12 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(M_{ADJ}\right)^T = \begin{bmatrix} -34 & -42 & -2 \\ -12 & -18 & 0 \\ 10 & 12 & 2 \end{bmatrix}$	Una vez obtenida M, se calcula su transpuesta.
$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\cdot\left(M_{ADJ}\right)^T = \left(\frac{1}{12}\right)\cdot\begin{bmatrix} -34 & -42 & -2 \\ -12 & -18 & 0 \\ 10 & 12 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -17/6 & -7/2 & -1/6 \\ -1 & -3/2 & 0 \\ 5/6 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}$	Aplicando el concepto de matriz inversa, se calcula la inversa de la matriz B.

Ejercicios de Práctica

Calcule la matriz inversa de las siguientes matrices.

58) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

59) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

60) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/a \\ -1 & 2/a \end{bmatrix}$

61) $A = \begin{bmatrix} b & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/b & 3/b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

62) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

63) $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/43 & 7/43 \\ -4/43 & -3/43 \end{bmatrix}$

64) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ R/ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3a & 1/a \end{bmatrix}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

Calcule la matriz inversa de las siguientes matrices.

65) $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -3\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ R/ $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -6 & 7\\ -1 & 3 & -3\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

66) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}$ R/ $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & -1\\ -4 & 5 & -2\end{bmatrix}$

67) $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -2 & -6\\ 5 & 7 & 8\end{bmatrix}$ R/ $A^{-1}=\begin{bmatrix}13/7 & 2/7 & -5/7\\ -27/7 & -2/7 & 12/7\\ 31/14 & 1/14 & -13/14\end{bmatrix}$

68) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ R/ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/7 & 1/7 & 3/7\\ 9/7 & 1/7 & -4/7\\ 3/7 & -2/7 & 1/7\end{bmatrix}$

69) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & 0 & -6\end{bmatrix}$ R/ $A^{-1}=\begin{bmatrix}9/43 & 6/43 & 8/43\\ -2/43 & 13/43 & 3/43\\ 15/86 & 5/43 & -1/86\end{bmatrix}$

1.6 Sistemas de Ecuaciones: Método de Matriz Inversa

El concepto de matriz inversa se puede utilizar para resolver sistemas de ecuaciones. Aunque puede resultar laborioso hacer la inversa de una matriz, la utilidad del método se aprecia cuando hay que resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes, ya que se usa una misma inversa.

Ya se vio que un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, se expresa en forma matricial como:

$$A\cdot X=B \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}}\times\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{\text{Matriz de incógnitas}}=\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}}_{\text{Matriz de términos independientes}}$$

Por lo tanto, si se quiere despejar la matriz de incógnitas X, se tendría:

$$X=\frac{B}{A} \qquad \Rightarrow \qquad X=A^{-1}\times B=\underbrace{\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\left(M_{ADJ}\right)^{T}\right)}_{\substack{\text{Esta operación}\\ \text{es el cálculo de}\\ \text{la inversa de A}}}\times\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

En otras palabras, la solución del sistema de ecuaciones dado, se obtiene al multiplicar la inversa de la matriz de coeficientes, por la matriz de términos independientes:

$$X=A^{-1}\times B$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 1.16: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 3x+5y=-12 \\ x+7y+2z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 3x+5y=-12 \\ x+7y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Matriz X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ -6 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}}, \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \times B$$

Se reescribe el sistema en forma matricial, para identificar adecuadamente las matrices A, X y B

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-10+0+21) - (5+0+12) = -6$$

Primer requisito para calcular la inversa de A, es que su determinante sea distinto de cero.

$$M_{ADJ} = \begin{bmatrix} c_{11}\cdot M_{11} = (1)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & c_{12}\cdot M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & c_{13}\cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ c_{21}\cdot M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & c_{22}\cdot M_{22} = (1)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & c_{23}\cdot M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ c_{31}\cdot M_{31} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & c_{32}\cdot M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & c_{33}\cdot M_{33} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$M_{ADJ} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 16 \\ 3 & -3 & 9 \\ -5 & 3 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(M_{ADJ}\right)^T = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ 16 & 9 & -11 \end{bmatrix}$$

Se construye la matriz adjunta de A. Cada elemento de la matriz adjunta es el producto del cofactor por el menor de la posición del elemento. Una vez obtenida la matriz adjunta, se construye su transpuesta.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(M_{ADJ}\right)^T = \left(\tfrac{1}{-6}\right) \cdot \begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ 16 & 9 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\tfrac{5}{3} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{6} \\ 1 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{8}{3} & -\tfrac{3}{2} & \tfrac{11}{6} \end{bmatrix}$$

Aplicando el concepto de matriz inversa, se calcula la inversa de la matriz A.

$$X = A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} -\tfrac{5}{3} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{6} \\ 1 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{8}{3} & -\tfrac{3}{2} & \tfrac{11}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\tfrac{5}{3}\cdot 0\right) + \left(-\tfrac{1}{2}\cdot -12\right) + \left(\tfrac{5}{6}\cdot -6\right) \\ (1\cdot 0) + \left(\tfrac{1}{2}\cdot -12\right) + \left(-\tfrac{1}{2}\cdot -6\right) \\ \left(-\tfrac{8}{3}\cdot 0\right) + \left(-\tfrac{3}{2}\cdot -12\right) + \left(\tfrac{11}{6}\cdot -6\right) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{matrix}$$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el Método de Matriz Inversa.

70) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-5y=6 \\ 5y-z=-3 \end{cases}$

R/ $\begin{cases} A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{6}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{2}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{5}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix} \\ x=\frac{21}{17}, y=-\frac{12}{17}, z=-\frac{9}{17} \end{cases}$

71) $\begin{cases} 2x-y=-5 \\ x+4y+2z=15 \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases}$

R/ $\begin{cases} A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{8}{11} & \frac{1}{11} & \frac{=2}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{14}{11} & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{bmatrix} \\ x=-1, y=3, z=2 \end{cases}$

72) $\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ 3x-2y-6z=7 \\ 5x+7y+8z=9 \end{cases}$

R/ $\begin{cases} A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{27}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{31}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{13}{14} \end{bmatrix} \\ x=3, y=-2, z=1 \end{cases}$

73) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=\frac{7}{3} \\ 3x+y+2z=\frac{10}{3} \end{cases}$

R/ $\begin{cases} A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \\ x=\frac{1}{3}, y=1, z=\frac{2}{3} \end{cases}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

2. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

En este capítulo definiremos las funciones exponencial y logarítmica. Para ellos se estudian sus propiedades y se plantea la forma de resolver ecuaciones que involucran estas funciones. El concepto de "función" fue introducido por René Descartes, como una regla de correspondencia entre dos conjuntos de números. Es decir, establece una relación de modo que a cada número "x" del primer conjunto, le corresponde un número "y" del segundo conjunto

Las funciones lineales, cuadráticas y racionales se conocen como **funciones algebraicas**. Las funciones algebraicas son funciones que se pueden expresar en términos de operaciones algebraicas. Si una función no es algebraica se llama una **función trascendental.** Las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son funciones transcendentales:

Funciones algebraicas: Lineal; Cuadrática; Racional

Funciones Trascendentales: Exponencial; Logarítmica; Trigonométrica

Las funciones trascendentales tienen aplicaciones en casi cualquier campo de la investigación humana. En química, física, biología, ingeniería, ayudan a explicar la manera en que se dan ciertos fenómenos en la naturaleza, así como a explicar el comportamiento de materiales. El crecimiento bacteriano, la desintegración radiactiva, la concentración de medicamentos en el flujo sanguíneo, la escala de Richter, leyes de Newton, el cálculo de interés compuesto en matemática financiera, todos estos temas requieren el uso de las funciones exponencial y logarítmica.

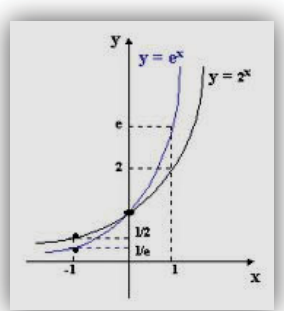
2.1 Funciones y ecuaciones exponenciales.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

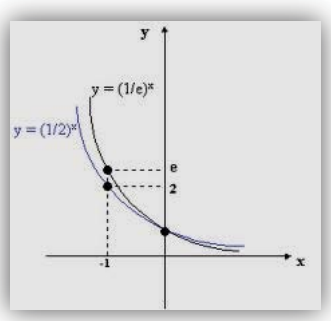
Una función exponencial tiene la forma:

$$f(x) = b^x \text{ donde: } \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$$

Está compuesta de una base $\boldsymbol{b}$ y el exponente $\boldsymbol{x}$. La función exponencial no está definida para bases negativas. Ejemplos:



$f(x) = 2^x$



$f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Note, de la figura anterior, que la función exponencial puede ser creciente o decreciente, y esto depende de la base $\boldsymbol{b}$, según se indica a continuación:

- Cuando la base $\boldsymbol{b} > 1$, entonces $f(x) = b^x$ es una función creciente. Ejemplo: $f(x) = 2^x$
- Cuando la base $0 < \boldsymbol{b} < 1$, entonces $f(x) = b^x$ es una función decreciente. Ejemplo: $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

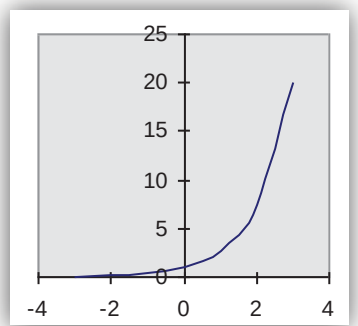
® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

La función exponencial de base *e*

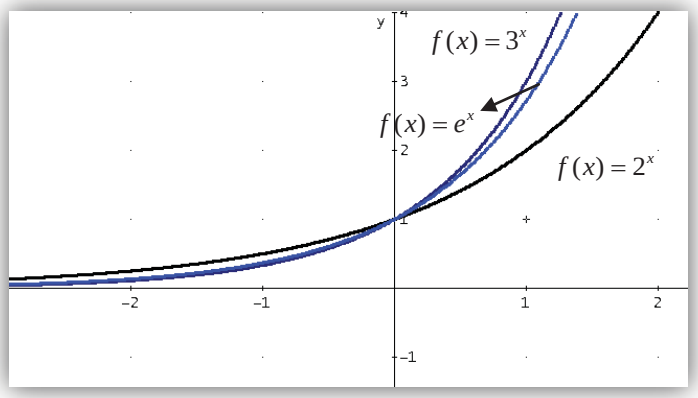
Al igual que π, otro número irracional muy utilizado es $e \approx 2.718281828$. La notación e para este número fue dada por Leonhard Euler (1727). El número e tiene gran importancia en las Matemáticas, siendo que no es racional (no es cociente de dos números enteros) y es el límite de la sucesión:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{es decir,} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Para un número real x, la ecuación $f(x)=e^x$ define a la función exponencial de base e, conociéndose también como una función exponencial natural. La gráfica de $f(x)=e^x$ tendría la forma:



El **dominio** de $f(x)=e^x$ es el conjunto de los números reales y su **rango** es el conjunto de los números reales positivos. Como 2 < e < 3, la gráfica de $f(x)=e^x$ está entre las de $f(x)=2^x$ y $f(x)=3^x$, como se ilustra a continuación:



ECUACIONES EXPONENCIALES DE IGUAL BASE

Siempre que sea posible, para resolver ecuaciones exponenciales es conveniente expresar los miembros de la ecuación como potencias de la misma base. Esto sugiere que el procedimiento de solución sería el siguiente:

1. Determinar la base común que tienen los términos de la ecuación.
2. Partiendo de las propiedades de las potencias, pasar las bases de los términos de la ecuación a la base común definida en el paso anterior.
3. Dentro de lo posible, reducir la ecuación a únicamente 2 términos, uno a cada lado del signo igual. Esto permite tener claridad que si las bases son igual, para que se cumpla la igualdad, entonces los exponentes deben ser iguales también.
4. Del razonamiento anterior, una vez igualadas las bases, se puede construir una "nueva ecuación" que nace de igualar los exponentes.
5. Se soluciona esta nueva ecuación, con lo que se encuentra también la solución de la ecuación original.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Debido a esta ventaja matemática de trabajar con propiedades de las potencias, antes de resolver ecuaciones de tipo exponencial, es necesario recordar algunas de estas propiedades. También se indican algunas propiedades de los radicales, en combinación con los exponenciales:

Propiedad	Ejemplo	Propiedad	Ejemplo
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^2)^5 = 4^{2 \cdot 5} = 4^{10}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$7^{\frac{2}{3}} = 7^{2 \cdot \frac{1}{3}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[3 \cdot 5]{2} = \sqrt[15]{2}$

Otra propiedad muy útil en la solución de ecuaciones exponenciales es $a^0 = 1$

Ejemplo 2.1: Resuelva la ecuación: $3^{x+1} = 81$	Note la configuración exponencial de la ecuación.
$3^{x+1} = 3^4$	La base común de los términos es 3. Usando propiedades exponenciales, se pasan todos los elementos a esa base.
$x+1 = 4$ $x = 4-1 \quad \Rightarrow \quad x = 3$	Para que se cumpla la igualdad, si las bases son iguales, los exponentes también. Por lo tanto igualamos exponentes. La nueva expresión es usualmente una ecuación sencilla de resolver, en este caso una ecuación lineal.
$3^{x+1} = 81$ $3^{3+1} = 81$ $3^4 = 81 \quad \Rightarrow \quad 81 = 81$	Se comprueba el resultado.
$R / x = 3$	Respuesta final

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 2.2: Resuelva la ecuación: $$e^{-x^2} = \left(e^{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$$	Note la configuración exponencial de la ecuación.
$e^{-x^2} = \left(e^{2x}\right) \cdot e^{-3}$ $e^{-x^2} = e^{2x-3}$	La base común de los términos es ***e***. Usando propiedades exponenciales, se simplifica la expresión hasta que quede únicamente un elemento a ambos lados del "=". En este caso se inició quitando los elementos del denominador.
$-x^2 = 2x - 3$ $-x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$	Al haber igualado las bases, para que se cumpla la igualdad, podemos igualar los exponentes también. Se resuelve la nueva expresión.
Para $x = -3$: $e^{-3^2} = \left(e^{-3}\right)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$ $e^{-9} = \left(e^{-6}\right)\frac{1}{e^3}$ $e^{-9} = e^{-9}$ Para $x = 1$: $e^{-1} = \left(e^{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$ $e^{-1} = \left(e^{2}\right)\frac{1}{e^3}$ $e^{-1} = e^{-1}$	Se comprueban ambos resultados.
$R / \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$	Respuesta final

Ejemplo 2.3: Resuelva la ecuación: $$\left(\frac{1}{2^{8x-1}}\right)^{-2} \cdot 2^{4x} - 2^{2x} \cdot \frac{1}{2} = 0$$	Note la configuración exponencial de la ecuación.
$\left(2^{8x-1}\right)^2 \cdot 2^{4x} = 2^{2x} \cdot 2^{-1}$ $2^{16x-2} \cdot 2^{4x} = 2^{2x} \cdot 2^{-1}$ $2^{20x-2} = 2^{2x-1}$	La base común de los términos es 2. Usando propiedades exponenciales, se simplifica la expresión hasta que quede únicamente un elemento a ambos lados del "=". En este caso se inició quitando los elementos del denominador.
$20x - 2 = 2x - 1$ $20x - 2x = -1 + 2$ $18x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{18}$	Al haber igualado las bases, para que se cumpla la igualdad, podemos igualar los exponentes también. Se resuelve la nueva expresión.
$R / x = \frac{1}{18}$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final (se omite el detalle de la comprobación).

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejercicios de Práctica

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $3^x = 27$ R/ $x = 3$

2) $2^{2x-5} = 128$ R/ $x = 6$

3) $3^{x^2-x-2} = 81$ R/ $x \in \{-2, 3\}$

4) $2^{x^2-2x-15} = 1$ R/ $x \in \{-3, 5\}$

5) $5^{x\cdot(-2x+1)} = \frac{1}{5}$ R/ $x \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$

6) $125^{(2x^2-6x)} - 625^{(x^2-2x+8)} = 0$ R/ $x \in \{-2.216, 7.216\}$

7) $(3^2)^{2x} = 3\cdot\left(3^3\right)^x$ R/ $x = 1$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 8\cdot\left(2^{x-1}\right)^3$ R/ $x = -\frac{1}{2}$

9) $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3(x+2)} = 8^{\frac{2}{3}}\cdot\left(2^{2x+1}\right)$ R/ $x = -6$

10) $3^{\sqrt{2x-5}} - 9^{\left(1+\frac{\sqrt{x-2}}{2}\right)} = 0$ R/ $x = 27$

11) $e^{\frac{(x-1)}{(x+1)}}\cdot e^{\frac{(x-2)}{(x+2)}} = e^7$ R/ $x \in \{-\frac{6}{5}, -3\}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

2.2 Funciones y ecuaciones logarítmicas.

Los logaritmos fueron desarrollados por el matemático escocés John Neper y publicados en 1614. Neper buscaba una forma de realizar multiplicaciones y divisiones mediante sumas y restas, mucho más fáciles de realizar para la época.

Así creó un grupo de números "artificiales" que sustituían a cada número "real". En otras palabras, a cada número "real" le corresponde un número "artificial" al que llamó ***logaritmo***. Los logaritmos creados por Neper se basan en el número irracional ***e*** ≈ 2.718281828.

Poco después, en 1617, el matemático Henry Briggs adaptó los logaritmos de Neper (conocidos también como ***neperianos***) a base 10, que resultan más convenientes. En base 10, el logaritmo de 1 es 0, el logaritmo de 10 es 1, el logaritmo de 100 es 2 y así sucesivamente. Pero lo más importante es la propiedad que permite calcular productos simplemente mediante la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b(a\cdot c)=\log_b(a)+\log_b(c)$$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función logarítmica se denota de la siguiente forma:

$\log_b(x)$ donde: $\begin{cases} b = \text{base} \\ x = \text{argumento} \end{cases}$

y se lee como "***logaritmo de x con base b***".
Los ***logaritmos comunes*** son los logaritmos de base 10:

$\log(x)=\log_{10}(x)$ (es la tecla ***log*** en las calculadoras)

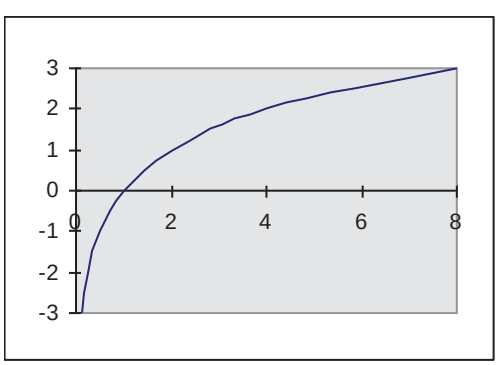
Los ***logaritmos naturales*** son los logaritmos de base ***e***:

$\ln(x)=\log_e(x)$ (es la tecla ***ln*** en las calculadoras)

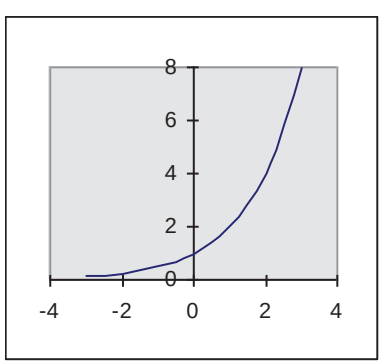
Note que las funciones exponencial $f(x)=b^x$ y logarítmicas $f(x)=\log(x)$ son inversas, para ***b*** >0 y ***b*** ≠1.
Las funciones exponencial y logarítmica son funciones inversas de manera que:

$$y=\log_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad b^y=x$$

Así por ejemplo:



$f(x)=\log_2(x)$



$f(x)=2^x$

El dominio de $f(x)=2^x$ es el conjunto de los números reales, mientras que el dominio de $f(x)=\log_2(x)$ es el conjunto de los números reales mayores que cero

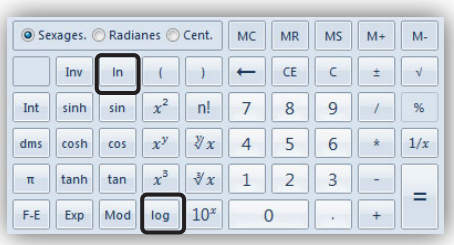
® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Para resolver ecuaciones exponenciales de diferente base y ecuaciones logarítmicas se deben manejar correctamente las propiedades de los logaritmos

Propiedad	Propiedad
$\log_b(x\cdot y)=\log_b(x)+\log_b(y)$	$\log_b(1)=0 \quad\Rightarrow\quad \ln(1)=0$
$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b(x)-\log_b(y)$	$\log_b(b)=1 \quad\Rightarrow\quad \ln(e)=1$
$\log_b(x)^n=n\cdot\log_b(x)$	$\log_b(b)^n=n \quad\Rightarrow\quad \ln(e)^n=n$
$\log_b(x)=\frac{\log(x)}{\log(b)}$	$a^{\log_b(x)}=x$

Uso de la calculadora para el cálculo de logaritmos y exponenciales.

Con las calculadoras se pueden calcular directamente los logaritmos, usando las teclas indicadas en la siguiente figura:



Ejemplos:

$$\log(2)=0.30103 \;\Leftrightarrow\; 10^{0.30103}=2 \qquad \ln(2)=0.69315 \;\Leftrightarrow\; e^{0.69315}=2$$
$$\log(0.5)=-0.30103 \;\Leftrightarrow\; 10^{-0.30103}=0.5 \qquad \ln(0.5)=-0.69315 \;\Leftrightarrow\; e^{-0.69315}=0.5$$

Cuando se necesita calcular un logaritmo con base diferente a 10 o a e se requiere usar la propiedad de cambio de base:

$$\log_b(x)=\frac{\log(x)}{\log(b)}$$

Ejemplos:

$$\log_7 2=\frac{\log 2}{\log 7}=\frac{0.301030}{0.845098}=0.35621 \qquad \log_3 10=\frac{\log 10}{\log 3}=\frac{1}{0.477121}=2.09590$$

Ejercicios de Práctica

12) $y=\log_5(3)$ R/ $y=0.68261$

13) $y=\log_{1.8}(0.5)$ R/ $y=-1.17925$

14) $y=\log_{5/2}(1/8)$ R/ $y=-2.26941$

15) $y=\log_\pi(3\cdot e)$ R/ $y=1.83328$

16) $y=\frac{\ln x+3\cdot\ln(x/3)}{e^x}$, si $x=3$ R/ $y=0.05470$

17) $y=\frac{e^{x/2}\ln(x^2)}{\ln x+e^x}$, si $x=2$ R/ $y=0.46625$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

CASO ESPECIAL: ECUACIÓN EXPONENCIAL CON DIFERENTE BASE

En el caso de ecuaciones donde las bases de las expresiones son diferentes, se aplican logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.4: Resuelva la ecuación: $5^{x-2} = 3^{3x+2}$	Note que las bases de las expresiones exponenciales no son iguales.
$\ln 5^{x-2} = \ln 3^{3x+2} \quad \Rightarrow \quad \ln(5)^{x-2} = \ln(3)^{3x+2}$	Aplicar función "***ln( )***" a ambos lados de la ecuación.
$(x-2)\cdot(\ln 5) = (3x+2)\cdot(\ln 3)$ $x\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 5 = 3x\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 3$	Se resuelve la ecuación aplicando ahora propiedades logarítmicas, con el objetivo de transformar la ecuación en otra que facilite el despeje de "***x***".
$x\cdot\ln 5 - 3x\cdot\ln 3 = 2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5$ $x\cdot(\ln 5 - 3\cdot\ln 3) = 2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5$ $x = \frac{2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5}{\ln 5 - 3\cdot\ln 3} = \frac{2.197 + 3.219}{1.609 - 3.296} \quad \Rightarrow \quad x \approx -3.212$	Se reacomoda la ecuación para despejar "***x***".
$R / x \approx -3.212$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final (se omite el detalle de la comprobación).

Ejemplo 2.5: Resuelva la ecuación: $5^{1-x^2} = \frac{1}{40}$	Note que las bases de las expresiones exponenciales no son iguales.
$\ln 5^{1-x^2} = \ln\frac{1}{40} \quad \Rightarrow \quad \ln(5)^{1-x^2} = \ln\left(\frac{1}{40}\right)$	Aplicar función "***ln( )***" a ambos lados de la ecuación.
$\ln(5)^{1-x^2} = \ln\left(\frac{1}{40}\right)$ $(1-x^2)\cdot(\ln 5) = \ln 1 - \ln 40$ $\ln 5 - x^2\cdot\ln 5 = 0 - \ln 40$ $\ln 5 + \ln 40 = x^2\cdot\ln 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 5 + \ln 40}{\ln 5} = x^2$	Se resuelve la ecuación aplicando ahora propiedades logarítmicas, con el objetivo de transformar la ecuación en otra que facilite el despeje de "***x***".
$\sqrt{\frac{\ln 5 + \ln 40}{\ln 5}} = x \quad \Rightarrow \quad x \approx \pm 1.81440$	Se reacomoda la ecuación para despejar "***x***".
$R / x \approx \pm 1.81440$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final (se omite el detalle de la comprobación).

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 2.6: Resuelva la ecuación: $$\frac{1}{9^x}+3^{1-2x}+9^{1-x}=10$$	Caso especial de ecuaciones con más de un término que se suma o resta.
$3^{-2x}+3^{1-2x}+3^{2(1-x)}=10$	Las bases son múltiplo de 3, por lo tanto se reescribe la ecuación.
$3^{-2x}+3^{1-2x}+3^{2(1-x)}=10$ $3^{-2x}+3^{1-2x}+3^{2-2x}=10$ $3^{-2x}+3\cdot 3^{-2x}+3^2\cdot 3^{-2x}=10$	Por propiedades exponenciales se logra obtener una expresión exponencial común en todos los sumandos de la ecuación.
$3^{-2x}\cdot(1+3+3^2)=10$ $3^{-2x}=\frac{10}{13}$	Se calcule el factor común, para luego resolver la ecuación. Esta última resultó ser una ecuación exponencial de diferente base.
$\ln 3^{-2x}=\ln\left(\frac{10}{13}\right)$ $-2x\cdot\ln(3)=\ln\left(\frac{10}{13}\right)$ $-2x=\frac{-0.262}{1.099} \quad\Rightarrow\quad x=0.119$	Se inicia aplicando la función de logaritmo natural, para luego aprovechando las propiedades logarítmicas, calcule el valor de x.
$R/\ x\approx 0.119$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final (se omite el detalle de la comprobación).

Ejemplo 2.7: Resuelva la ecuación: $$e^{-8x}+e^{-5x}-12e^{-2x}=0$$	Caso especial de ecuaciones con más de un término que se suma o resta.
$e^{-2x}(e^{-6x}+e^{-3x}-12)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\text{a)}\quad e^{-2x}=0\\ \text{b)}\quad e^{-6x}+e^{-3x}-12=0\end{cases}$	Se factoriza la ecuación con el término adecuado. Note que queda una expresión tipo $a\cdot b=0$, de la cual se saca provecho matemático.
$e^{-2x}=0 \quad\Rightarrow\quad$ No tiene solución!	Resolviendo el caso a), esta ecuación no tiene solución, ya que un término exponencial no puede dar 0.
$e^{-6x}+e^{-3x}-12=0$ Si $e^{-3x}=z$, se forma una cuadrática: $z^2+z-12=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}z_1=-4\\ z_2=3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}e^{-3x}=-4\\ e^{-3x}=3\end{cases}$	Resolviendo el caso b), por medio de una adecuada sustitución la ecuación se resuelve como una cuadrática. De los dos resultados obtenidos, el $z_1=-4$ no tiene solución, ya que al igualarlo con el término exponencial, sabemos que estos no pueden ser cero o negativos.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

$e^{-3x} = 3$ $\ln(e^{-3x}) = \ln 3$ $-3x \cdot \ln(e) = \ln 3$ $-3x = \ln 3 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\ln 3}{-3} = -0.366$	Resolviendo para $z_2 = 3$, se trabaja como una ecuación exponencial con bases distintas. Se inicia aplicando la función de logaritmo natural, para luego aprovechando las propiedades logarítmicas, calcule el valor de x.
$R / x \approx -0.366$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final (se omite el detalle de la comprobación).

Ejercicios de Práctica

18) $3^x = 21$ R/ $x = 2.77$

19) $3^{x^2} = 5^x$ R/ $x \in \left\{0, \dfrac{\ln 5}{\ln 3}\right\}$

20) $3^{x^2} = 7$ R/ $x = \pm\sqrt{\dfrac{\ln 7}{\ln 3}}$

21) $5^{x-2} - 3^{3x+2} = 0$ R/ $x = -3.21$

22) $5^{2x+1} - 6^{x-2} = 0$ R/ $x = -3.64$

23) $2^{x-1} - 3^{4x+1} = 0$ R/ $x = -0.484$

24) $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$ R/ $x = \dfrac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{\ln\left(\frac{32}{9}\right)}$

25) $10^{2x+1} = 20^{x-2}$ R/ $x = -5.15$

26) $3^{x+4} = 2^{x-16}$ R/ $x = -38.19$

27) $11^{5x+1} = \left(13^{x+1}\right)^2$ R/ $x = 0.398$

28) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} \cdot 9^x - 2^{x+2} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x} \cdot 2 = 0$ R/ $x = 0.215$

29) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} \cdot 9^x - 8^{x+2} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x} \cdot 2 = 0$ R/ $x = 1.181$

30) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1-2x} = \left(\sqrt{2}\right)^{6x-3}$ R/ $x = 0.50$

31) $\dfrac{6^{2x}}{\sqrt{36}} - 2^{x-1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{1}{2^{(1/3+1)}} = 0$ R/ $x = 0.140$

32) $\dfrac{1}{\sqrt{2^{2x-4}}} \cdot 16^{(2x-2)} \cdot \dfrac{2^{(4x-3)}}{2^{(-7x+5)}} = \dfrac{7^{(x+2)}}{7^{(-x+2)}} \cdot \dfrac{1}{49^{(x+3)}}$ R/ $x = -0.158$

33) $3^{2x} + 9^{x+1} = 4$ R/ $x = -0.417$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

34) $4^{-x}+2^{(1-2x)}+4^{(1-x)}=12$ R/ $x=-0.389$

35) $4^{(1-2x)}+2^{(1-4x)}-4^{2\cdot(1-x)}=-20$ R/ $x=-\frac{1}{4}$

36) $\frac{1}{9^x}+3^{1-2x}+9^{1-x}=10$ R/ $x=0.119$

37) $\frac{1}{49^x}+7^{1-2x}+49^{1-x}-10=0$ R/ $x=0.447$

38) $9^{1-2x}-81^{1-x}+3^{1-4x}=-6630+6561^{1-\frac{x}{2}}$ R/ $x=0$

39) $e^{-8x}+e^{-5x}-35\cdot e^{-2x}=0$ R/ $x=-0.563$

40) $e^{-8x}-3\cdot e^{-4x}-10=0$ R/ $x=-0.402$

41) $e^{6x}-3\cdot e^{3x}-28=0$ R/ $x=\frac{\ln 7}{3}$

42) $5^x+125\cdot 5^{-x}=30$ R/ $x\in\{1,2\}$

43) $5^x-5^{-x}=6$ R/ $x=1.130$

44) $2^{2x}-18\cdot(2^x)=-32$ R/ $x\in\{1,4\}$

45) $3\cdot(3^{2x})-28\cdot(3^x)+9=0$ R/ $x\in\{-1,2\}$

46) $2^{2x}-2^x-1=1$ R/ $x=1$

47) $4^{2x}-8\cdot 4^x-3=0$ R/ $x=1.532$

48) $4^x-3\cdot 4^{-x}=8$ R/ $x=1.532$

49) $3\cdot 3^{-2x}-9\cdot 3^{-x}-28=0$ R/ $x=-1.447$

50) $2^x-6\cdot 2^{-x}-6=0$ R/ $x=2.781$

51) $4\cdot e^{2x}-3\cdot e^x=0$ R/ $x=-0.288$

52) $e^{2x+\ln 4}=3\cdot e^x$ R/ $x=-0.288$

53) $e^{2x+\ln 5}=6\cdot e^x$ R/ $x=0.182$

54) $e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}\cdot e^{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)}-e^7=0$ R/ $x\in\{-3,-\frac{6}{5}\}$

55) $x^2\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)+2x\cdot e^{-x^2}=0$ R/ $x\in\{-1,0,1\}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

DESARROLLO DE LOGARITMOS EN VARIOS MÁS SIMPLES

Por conveniencia para desarrollar los cálculos, muchas veces en conveniente transformar un logaritmo, cuya expresión luce complicada, en varios logaritmos mucho más simples. Esto se logra aplicando propiedades logarítmicas, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.8: Desarrolle el logaritmo mostrado en varios más simples:

$$\log \frac{x \cdot y^3}{\sqrt[3]{3 \cdot z^4}}$$

$\log \frac{x \cdot y^3}{(3 \cdot z^4)^{\frac{1}{3}}}$	Las formas radicales se pasan a la forma exponencial
$\log \frac{x \cdot y^3}{3^{\frac{1}{3}} \cdot z^{\frac{4}{3}}}$	Se aplica la propiedad de una potencia elevada a un exponente.
$\log\left(x \cdot y^3\right) - \log\left(3^{\frac{1}{3}} \cdot z^{\frac{4}{3}}\right)$	Se aplica la propiedad de logaritmo de una división que equivale a una resta.
$\log(x) + \log\left(y^3\right) - \left[\log\left(3^{\frac{1}{3}}\right) + \log\left(z^{\frac{4}{3}}\right)\right]$	Se aplica la propiedad de logaritmo de una multiplicación, que equivale a una suma.
$\log(x) + 3 \cdot \log(y) - \frac{1}{3} \cdot \log(3) - \frac{4}{3} \cdot \log(z)$	Finalmente, se elimina el paréntesis cuadrado y se bajan los exponentes.

Ejercicios de Práctica

Desarrollo los siguientes logaritmos en varios más simples

56) $\log\left(\frac{x\sqrt[3]{y}}{5\sqrt{z}}\right)$ R/ $\log x + \frac{1}{3} \cdot \log y - \log 5 - \frac{1}{2} \cdot \log z$

57) $\log_5\left(\frac{x \cdot \left(x^3 - 2\right)^2}{5x + 3}\right)$ R/ $\log_5 x + 2 \cdot \log_5(x^3 - 2) - \log_5(5x + 3)$

58) $\log_5\left(\frac{x^2 \cdot \ln x}{\sqrt[6]{\pi}}\right)^3$ R/ $6 \cdot \log_5 x + 3 \cdot \log_5(\ln x) - \frac{1}{2} \cdot \log_5 \pi$

59) $\ln\left(\frac{e^{x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 3}}{\cos^3\left(x^2\right)}\right)$ R/ $\ln x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 3) - 3 \cdot \ln\left(\cos x^2\right)$

60) $\ln\left(\frac{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(x^3 + 1\right)^4}}\right)$ R/ $\frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) - \frac{4}{3} \cdot \ln\left(x^3 + 1\right)$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

SIMPLIFICACIÓN DE VARIOS LOGARITMOS EN UNO MÁS COMPLEJO

Contrario al caso anterior, en esta sección se tratará la forma de agrupar varios logaritmos de la misma base, en un solo logaritmo de expresión más compleja. Al igual que el caso anterior, esto se logra aplicando propiedades logarítmicas, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.9: Simplifique la expresión mostrada en un único logaritmo:

$$3\cdot\log x+2\cdot\log y-\tfrac{1}{2}\cdot\log z$$

$\log x^3+\log y^2-\log z^{\frac{1}{2}}$	Lo primero que se nota es que los logaritmos tengan la misma base. Luego los multiplicadores de los logaritmos se pasan a exponentes de los logaritmos.
$\log x^3+\log y^2-\log\sqrt{z}$	Los exponentes fraccionarios se reescriben como expresiones radicales.
$\log\left(x^3\cdot y^2\right)-\log\sqrt{z}$	La suma de logaritmos se reescribe como un solo logaritmo, donde sus argumentos se multiplican.
$\log\left(\dfrac{x^3\cdot y^2}{\sqrt{z}}\right)$	Finalmente, la resta de logaritmos se reescribe como un solo logaritmo con argumentos que se dividen.

Ejercicios de Práctica

Reduzca las siguientes expresiones a un único logaritmo

61) $2\cdot\log_x a+\frac{1}{3}\cdot\log_x b-\log_x c$ R/ $\log_x\left(\dfrac{a^2\cdot\sqrt[3]{b}}{c}\right)$

62) $\frac{2}{3}\cdot\log_x a-\frac{1}{3}\cdot\log_x b-\frac{5}{3}\cdot\log_x c$ R/ $\log_x\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b\cdot c^5}}$

63) $2\cdot\log x-3\cdot\log\left(x+1\right)-\log 2$ R/ $\log\left(\dfrac{x^2}{2\cdot\left(x+1\right)^3}\right)$

64) $2\cdot\ln\left(\tan^4 x\right)-3\cdot\ln\left(2^x\right)-\frac{1}{2}\cdot\ln e^{x^2}$ R/ $\ln\left(\dfrac{\tan^6 x}{2^{3x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}\right)$

65) $\log_3(x-2)-\log_3(x+2)$ R/ $\log_3\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

66) $3\cdot\ln x+2\cdot\ln y-4\cdot\ln z$ R/ $\ln\left(\dfrac{x^3\cdot y^2}{z^4}\right)$

67) $2\cdot\left[\ln x-\ln(x+1)-\ln(x-1)\right]$ R/ $\ln\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^2$

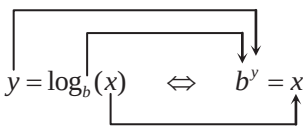
® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Como su nombre lo indica, son ecuaciones en dónde la incógnita se encuentra dentro de una expresión logarítmica, por ejemplo:

$$\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$$

Para resolver una ecuación logarítmica, usualmente es necesario transformarla en una ecuación exponencial, utilizando aquella relación:



Así por ejemplo:

$$\underbrace{\log_x 8 = \frac{1}{2}}_{\text{Ecuación original de forma logarítmica}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{\frac{1}{2}} = 8}_{\text{Misma ecuación transformada a su forma exponencial}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (8)^2}_{\text{Solucionando ecuación exponencial}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x = 64}_{\text{Resulado final}}$$

Esto sugiere que el procedimiento de solución sería el siguiente:

1. Pasar todos los términos con logaritmo, y que contengan la variable, a un lado de la ecuación. No es necesario incluir los términos logarítmicos de números.
2. Reducir estos logaritmos a uno solo, aplicando propiedades.
3. Transformar este único logaritmo a su forma exponencial, creando así una nueva ecuación, ahora de tipo exponencial.
4. Resolver la nueva ecuación exponencial, con las técnicas respectivas.
5. Comprobar los resultados

Ejemplo 2.10: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2$$

$x^{-2} = \frac{1}{9}$	Al haber un solo logaritmo, ya la "reducción" del paso 1 está hecha. El siguiente paso es transformar la ecuación logarítmica a su forma exponencial.
$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}$ $x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$	Se transforma la ecuación, quedando en una ecuación de grado 2, la cual al resolverla arroja dos posibles resultados. Ambos hay que comprobarlos para ver si los dos son correctos o alguno de los dos debe descartarse.
Para $x = -3$: $\underbrace{\log_{-3}\left(\frac{1}{9}\right)}_{\text{La base del logaritmo no puede ser negativa: no tiene solución.}} = -2$ Para $x = 3$: $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ $3^{-2} = \frac{1}{9}$ $\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ $\Rightarrow \quad R / x = 3$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 2.11: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_{27} x = \frac{1}{3}$$

$27^{\frac{1}{3}} = x$ $3 = x$	Al haber un solo logaritmo, ya la "reducción" del paso 1 está hecha. El siguiente paso es transformar la ecuación logarítmica a su forma exponencial. En este caso se resuelve fácilmente.
$\log_{27}(3) = \frac{1}{3}$ $\frac{\log(3)}{\log(27)} = \frac{1}{3}$ $0.33333 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad R/\ x = 3$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final.

Ejemplo 2.12: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_3(4x-7) = 2$$

$3^2 = 4x - 7$ $9 + 7 = 4x$ $\frac{16}{4} = x \quad \Rightarrow \quad x = 4$	Al haber un solo logaritmo, ya la "reducción" del paso 1 está hecha. El siguiente paso es transformar la ecuación logarítmica a su forma exponencial. En este caso se resuelve fácilmente.
$\log_3(4 \cdot 4 - 7) = 2$ $\log_3(9) = 2$ $2 \cdot \log_3(3) = 2$ $2 = 2 \quad \Rightarrow \quad R/\ x = 4$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final.

Ejemplo 2.13: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log 2^{3x} = \log 3$$

$3x \cdot \log 2 = \log 3$ $x \cdot (3 \cdot \log 2) = \log 3$ $x = \frac{\log 3}{3 \cdot \log 2} \quad \Rightarrow \quad x = 0.528$	Al haber un solo logaritmo con la variable, no es indispensable agrupar TODOS los logaritmos. Se trabaja con el lado izquierdo de la expresión, bajando el exponente. Este simple paso coloca la variable en posición de fácil despeje.
$\log 2^{(3 \cdot 0.528)} = \log 3$ $\log 2^{(1.584)} = \log 3$ $0.477 = 0.477 \quad \Rightarrow \quad R/\ x = 0.528$	Se comprueba el resultado y se obtiene la respuesta final.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 2.14: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log x^3 - \log 32 = \log\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\log x^3 - \log\left(\frac{x}{2}\right) = \log 32$$

$$\log\left(\frac{x^3}{x/2}\right) = \log 32$$

$$\log\left(\frac{2\cdot x^3}{x}\right) = \log 32$$

Se unen los logaritmos con variable en un solo lado de la ecuación, para luego reducirlo a una sola expresión logarítmica. Note que no simplificamos la expresión algebraica, para evitar "perder" posibles soluciones a la ecuación por efecto de la simplificación.

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cdot x^3}{x} = 32$$

$$2x^3 = 32x$$

$$2x^3 - 32x = 0$$

$$2x\cdot(x^2-16) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 16 = 0 & \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -4 \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Al tener un único logaritmo a ambos lados de la ecuación, podemos igualar sus "argumentos", ya que si:

$$\log(a) = \log(b) \quad \Rightarrow \quad a = b\,.$$

Reescribimos entonces la expresión y resolvemos la ecuación grado 3 que se tiene. Para ello se factoriza la ecuación y se encuentran las diversas soluciones.

Para $x_1 = 0$: $\underbrace{\log 0 - \log 32 = \log 0}$ NO HAY SOLUCIÓN

Para $x_2 = -4$: $\underbrace{\log(-64) - \log 32 = \log(-32)}$ NO HAY SOLUCIÓN

Para $x_3 = 4$:

$$\log 64 - \log 32 = \log 2$$

$$\log\left(64/32\right) = \log 2$$

$$\log 2 = \log 2$$

$$\Rightarrow \quad R/\ x = 4$$

Se comprueba cada una de las posibles soluciones y se obtiene al final la solución definitiva.

Ejemplo 2.15: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_4(x+3) - 1 = -\log_4(2-x)$$

$$\log_4(x+3) + \log_4(2-x) = 1$$

$$\log_4\left[(x+3)(2-x)\right] = 1$$

$$4^1 = (x+3)(2-x)$$

Se unen los logaritmos con variable en un solo lado de la ecuación, para luego reducirlo a una sola expresión logarítmica. La nueva ecuación logarítmica se transforma a su forma exponencial.

$$4 = -x^2 - x + 6$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Se desarrolla la ecuación exponencial, resultando en una ecuación cuadrática la cual se resuelva, arrojando dos posibles soluciones.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Para $x_1 = -2$: $\log_4(1) - 1 = -\log_4(4)$ $0 - 1 = -1$ $-1 = -1$ Para $x_2 = 1$: $\log_4(4) - 1 = -\log_4(1)$ $1 - 1 = 0$ $0 = 0$ $\Rightarrow \quad R / x \in \{-2, 1\}$	Se comprueba cada una de las posibles soluciones y se obtiene al final la solución definitiva. En este caso las dos soluciones preliminares cumplen.

Ejemplo 2.16: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\ln(x-4)^2 + 2\cdot\ln(x-4) - \ln(x^2 - 8x + 16) - \ln(x-4) + \ln(x) = 0$$

$\ln(x-4)^2 + \ln(x-4)^2 - \ln(x-4)^2 - \ln(x-4) + \ln(x) = 0$ $\ln(x-4)^2 - \ln(x-4) + \ln(x) = 0$ $\ln\dfrac{x(x-4)^2}{(x-4)} = 0$	Se unen los logaritmos con variable en un solo lado de la ecuación, para luego reducirlo a una sola expresión logarítmica.
$e^0 = \dfrac{x(x-4)^2}{(x-4)}$ $1 = \dfrac{x(x-4)^2}{(x-4)}$ $x - 4 = x^3 - 8x^2 + 16x$ $0 = x^3 - 8x^2 + 15x + 4$ $0 = (x-4)(x^2 - 4x - 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -0.236 \\ x_3 = 4.236 \end{cases}$	La nueva ecuación logarítmica se transforma a su forma exponencial. Se desarrolla la ecuación exponencial, resultando en una ecuación grado 3. Para solucionarla se puede factorizar y encontrar luego las tres posibles soluciones.
Para $x_1 = 4$: $\underbrace{\ln(x-4) = \ln 0}$ SE PRODUCE INDEFINICIÓN EN ESTE TÉRMINO Para $x_2 = -0.236$: $\ln(x-4) = \ln(-4.236)$ $\underbrace{\ln(x) = \ln(-0.236)}$ SE PRODUCE INDEFINICIÓN EN ESTOS 2 TÉRMINOS Para $x_3 = 4.236$: $\ln 1 = 0$ $0 = 0$ $\Rightarrow \quad R / x = 4.236$	Se comprueba cada una de las posibles soluciones, sustituyendo en la ecuación original, y se obtiene al final la solución definitiva. En este caso solo una de las 3 soluciones cumple. Nota: no se indica la comprobación completa, únicamente se indica en qué parte de la ecuación original se produce la indefinición de los valores x preliminares.

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

Ejemplo 2.17: Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\tfrac{1}{9}\cdot\ln\left(x^2-9\right)-\tfrac{17}{9}\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+\ln\left(\frac{1}{x^2+6x+9}\right)=2.20$$

$$\tfrac{1}{9}\cdot\ln\left((x+3)(x-3)\right)-\tfrac{17}{9}\cdot\ln(x-3)+\tfrac{17}{9}\cdot\ln(x+3)+\ln\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right)=2.20$$

$$\tfrac{1}{9}\cdot\ln(x+3)+\tfrac{1}{9}\cdot\ln(x-3)-\tfrac{17}{9}\cdot\ln(x-3)+\tfrac{17}{9}\cdot\ln(x+3)-2\cdot\ln(x+3)=2.20$$

$$\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{17}{9}-2\right)\cdot\ln(x+3)+\left(\tfrac{1}{9}-\tfrac{17}{9}\right)\cdot\ln(x-3)=2.20$$

$$0-\tfrac{16}{9}\cdot\ln(x-3)=2.20$$

$$\ln(x-3)=-1.238$$

Por la variedad de expresiones, parece más conveniente factorizar. Esto permite identificar expresiones semejantes que se suman, hasta finalizar la reagrupación de logaritmos para obtener finalmente un solo logaritmo.

$$e^{-1.238}=x-3$$

$$e^{-1.238}+3=x$$

$$3.290=x$$

La nueva ecuación logarítmica se transforma a su forma exponencial. Se resuelve esta ecuación.

Para $x_1=3.290$:

$$\left.\begin{array}{r}\tfrac{1}{9}\cdot\ln(1.824)-\tfrac{17}{9}\cdot\ln(0.0461)+\ln(0.0253)=2.20\\ 0.0668-(-5.812)+(-3.677)=2.20\\ 2.20=2.20\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad R/\ x=3.290$$

Se comprueba y se obtiene al final la solución definitiva.

Ejercicios de Práctica

68) $\log_4(x+5)=3$ R/ $x=59$

69) $\log_2\left(\log_5\left[\ln(x+1)\right]\right)=0$ R/ $x=e^5-1$

70) $\ln\left(\log_2\left[\log_2(x+4)\right]\right)=0$ R/ $x=0$

71) $\log_3\left[(2x+1)(19x+5)\right]=6$ R/ $x\in\left\{-\tfrac{181}{38},4\right\}$

72) $\log_{(6x-17)}\left(x^2-9\right)=1$ R/ $x=4$

73) $\log(3x+1)-\log(2x-3)=1-\log 5$ R/ $x=7$

74) $\log(4x+5)+\log(x-1)=2$ R/ $x=5$

75) $\log(x+5)+\log(x+4)-1=0$ R/ $x=-1.298$

76) $\log(2x+1)-\log(x+3)=0$ R/ $x=2$

77) $\log\left(16-x^2\right)=2\cdot\log(3x+4)$ R/ $x=0$

78) $2\cdot\log(x)-1=\log(1-2x)$ R/ $x=0.488$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

79) $x\cdot\log_3(81)-2\cdot\log_3(3)^x=3$ R/ $x=\frac{3}{2}$

80) $\log_5(2x+3)=\log_5 11+\log_5 3$ R/ $x=15$

81) $\log_6(x+3)=1-\log_6(x-2)$ R/ $x=3$

82) $-\log_{1/3}(x^2+x)=1-\log_{1/3}(x^2-x)$ R/ $x=2$

83) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$ R/ $x=2$

84) $2\cdot\log_2(x+2)+\log_2\left(\frac{1}{2x+4}\right)=4$ R/ $x=30$

85) $\log_9\sqrt{10x+5}-\frac{1}{2}=\log_9\sqrt{x+1}$ R/ $x=4$

86) $\log(x^2+4)-\log(x+2)-\log(x-2)=2$ R/ $x=2.02$

87) $\log(x+3)+\log(x-1)=\log(4x)$ R/ $x=3$

88) $\log(x-3)-\frac{1}{2}\cdot\log(2x-6)=1-\log 100$ R/ $x=\frac{151}{50}$

89) $\ln(x+6)-\ln 10=\ln(x-1)-\ln 2$ R/ $x=\frac{11}{4}$

90) $3\cdot\ln(x)-\ln(x)^3+\ln(x-1)=0$ R/ $x=2$

91) $\ln(x)^2+\ln(x)^3+\ln(x)^4-\ln(x)^5-\ln(16)=0$ R/ $x=2$

92) $\ln\left(\frac{1}{x^2+8x+16}\right)+\frac{1}{6}\cdot\ln(x^2-16)-\frac{11}{6}\cdot\ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right)=1.10$ R/ $x=4.517$

93) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2+6x+9}\right)+\ln(x^2-9)^{1/2}-\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)=0.693$ R/ $x=5$

94) $\ln\left(\frac{1}{x^2+10x+25}\right)+\frac{1}{9}\cdot\ln(x^2-25)-\frac{17}{9}\cdot\ln\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=1.10$ R/ $x=5.54$

95) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0.693$ R/ $x=3$

96) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x^2-x}{x^2+2x+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x\cdot(x-1)}{x+1}\right)=0.693$ R/ $x=5$

97) $(\ln x)^2=\ln x+20$ R/ $x\in\{e^{-4},e^5\}$

98) $\log_4 x=\sqrt[3]{\log_4 x}$ R/ $x\in\{\frac{1}{4},1,4\}$

99) $4=\sqrt{2+7(e)^{x^2}}$ R/ $x=\pm\sqrt{\ln 2}$

100) $(e^{x-1}-2)(\log_3(x-2)-2)=0$ R/ $x=11$

101) $(e^{x+2}-2)(\log_2(3x-2)-2)(27^x-9^x)=0$ R/ $x=2$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

102) $\left(e^x+2\right)\left(\log_x\left(3x-2\right)-2\right)\left(2^x-4^x\right)=0$ R/ $x=2$

103) $\left(5-\log x\right)\left(3^x-2^{x+1}\right)=0$ R/ $x\in\{100000,1.710\}$

Ejercicios adicionales al capítulo

104) $\left(5-e^{3x-1}\right)\left(9^{\sqrt{x}}-3^{x-3}\right)\left(3^x-21\right)=0$ R/ $x\in\{0.870,9,2.771\}$

105) $3^{5x-8}=9^x$ R/ $x=8/3$

106) $25^{x^2}=5^{3x}$ R/ $x\in\{0,3/2\}$

107) $\left(0.5^{x^2}\right)\left(2^{2x+2}\right)=\frac{1}{64}$ R/ $x\in\{-2,4\}$

108) $\left(\frac{1}{4}\right)^{(2-x)}=\dfrac{256}{2^{x+3}}$ R/ $x=3$

109) $8^{3x-5}=0.125\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}$ R/ $x=1.236$

110) $4^{2x-3}0.125=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ R/ $x=6$

111) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{9}{16}$ R/ $x\in\{-0.30,3.30\}$

112) $\left(\frac{1}{8}\cdot 4^x\right)^x=2^{3x-4}$ R/ $x=1$

113) $\left(\frac{1}{27}\cdot 9^x\right)^x=3^{3x-4}$ R/ $x\in\{0.634,2.366\}$

114) $3^{x+1}-3^x=72$ R/ $x=3.262$

115) $7^{5x}+7^{5x-1}=6$ R/ $x=0.170$

116) $7\cdot 5^x-5^{x+2}+450=0$ R/ $x=2$

117) $3^{x+1}+9^x-108=0$ R/ $x=2$

118) $4\cdot 2^{3x+3}-2^{2x+2}-4\cdot 2^{x+1}+1=0$ R/ $x\in\{-3,-1\}$

119) $8^{x-3}=9^{x-3}$ R/ $x=3$

120) $\dfrac{1}{\sqrt{2^{2x-4}}}\cdot 16^{2x-2}\cdot\dfrac{2^{4x-3}}{2^{-7x+5}}=\dfrac{7^{x+2}}{7^{-x+2}}\cdot\dfrac{1}{49^{x+3}}$ R/ $x=3$

121) $\left(e^x-3\right)\left[\ln\left(\log_2\left[\log_2\left(x+3\right)\right]\right)\right]\left(3^{x^2}-5^x\right)=0$ R/ $x\in\{0,1,\ln 3\}$

122) $\log\left(x-4\right)-\log\left(3x-10\right)=\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$ R/ $x=5$

123) $-\log 2+\log\left(x-5\right)=\frac{1}{2}\cdot\log\left(3x-20\right)$ R/ $x\in\{7,15\}$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

124) $\log\sqrt{x+21}+\frac{1}{2}\cdot\log(x-21)=1+\log 2$ R/ $x=29$

125) $2\cdot\log x+\log\left(6-x^2\right)=0$ R/ $x\in\left\{\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right\}$

126) $\frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2+x-2}\right)+\ln\left(x^2-4\right)^{2/3}+\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=1.10$ R/ $x=0.501$

127) $\left(e^{x-1}-2\right)\left(\log_3(x-2)-2\right)\left(2^{x^2}-4^{3x}\right)=0$ R/ $x\in\{6,11\}$

128) $\log_6(x+3)=1-\log_6(x-2)$ R/ $x=3$

129) $\ln\left(x^2-1\right)^{1/2}+\ln\left(\frac{x^2-x}{x^2+2x+1}\right)^{1/2}-\ln\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^{1/2}=0.693$ R/ $x=5$

130) $\left(\log_x(3x-2)-2\right)\cdot\ln\left(\log_2\left[\log_2(x+3)\right]\right)=0$ R/ $x=2$

131) $\left(e^{-8x}-3\cdot e^{-4x}-10\right)\cdot\ln\left(\log_2\left[\log_2(x+3)\right]\right)=0$ R/ $x\in\{-0.402,1\}$

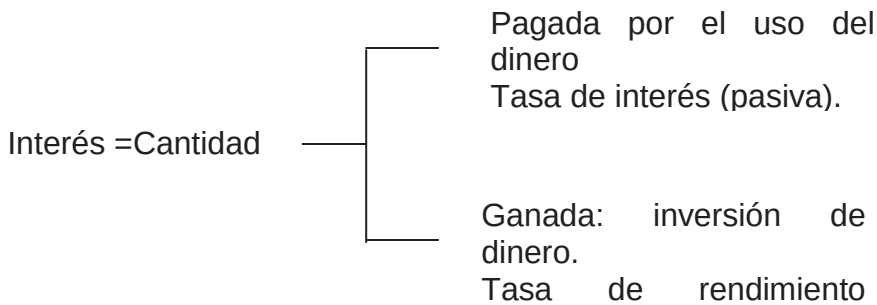
132) $\log_{1/3}\left(x^2+x\right)+1=\log_{1/3}\left(x^2-x\right)$ R/ $x=-2$

® Derechos reservados. Prohibida reproducción parcial o total

3. INTERÉS COMPUESTO

3.1 Concepto básico: Interés

El interés es la cantidad pagada por el uso del dinero de terceras personas o la cantidad ganada por la inversión de dinero.



Existen dos criterios para calcular el interés a recibir o pagar en una transacción

Interés simple o Interés compuesto.

Interés simple

El costo (gasto, precio,…) del dinero que se genera sobre un capital que se mantiene un periodo de tiempo invertido o en préstamo.
Variables en el interés simple:

I = cantidad recibida por los intereses.
P = Capital, inversión o valor presente.
i = taza de interés a de rendimiento por unidad de tiempo sobre la base de un año, se expresa en decimales.
t = es el tiempo o plazo de la transacción. Puede darse en años, meses o días.

En esta sección nos ocuparemos del interés compuesto como una aplicación de las ecuaciones exponenciales y los logaritmos, en cursos posteriores de matemática financiera se profundiza en los temas.

3.2 Interés compuesto

Es el interés que se genera (gana o paga) sobre un capital o principal que va aumentando a medida que los intereses generados en los periodos anteriores se suman al capital, es decir se gana interés sobre interés, los intereses se capitalizan o se convierten en capital.

El intervalo de tiempo transcurrido entre capitalizaciones puede ser de un año, semestre, trimestre, mes, día…o cada instante. Por lo que se puede hablar de interés continuo.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

FORMULA DE INTERES COMPUESTO

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{(n \cdot t)}$$

P = Monto principal = valor presente = capital a invertir

r = tasa de interés (expresada como decimal)

n = número de periodos de interés por año.

Periodos	n
Diaria	360
mensual	12
Trimestral	4
Semestral	2
anual	1

t = Número de años en los que se invierte P.

A = monto principal después de t años. (valor futuro)

3.3 Interés compuesto en forma continua

Cuando el número periodos de interés en el año crece al infinito, matemáticamente se expresa con la siguiente expresión:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

si k = n/r, entonces se puede volver a escribir la fórmula:

$$\lim_{k \to \infty} P\left[\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k}\right]^{rt} \Rightarrow Pe^{rt} \quad cuando \quad k \to \infty$$

y así se obtiene la fórmula para el interés contínuo, tal que:

$$A = P \cdot e^{(r \cdot t)}$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejemplo 3.1: Cálculo de A (Valor a futuro)
Suponga que se invierten $1000 a un tipo de interés del 9% compuesto mensualmente. Calcular el monto total obtenido después de 5, 10 y 15 años.

Solución: Aplicando la formula de interés compuesto con
r = 0.09
n =12
P= $1000

El monto total después de t años es: $A = 1000\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12t}$

Numero de Años	Usando la fórmula	A
5	$1000(1.0075)^{60}$	$1565.68
10	$1000(1.0075)^{120}$	$2451.36
15	$1000(1.0075)^{180}$	$3838.04

Ejemplo 3.2:
El 2 de enero de 1996 se colocaron $2000 en una cuenta de retiro que pagará un interés del 10% anual compuesto de manera continua ¿A cuánto ascenderá la cuenta el primero de enero del año 2016?

Solución: La cantidad A después de 20 años es

$$A = P \cdot e^{(r \cdot t)}$$

$$A = \$2000 \cdot e^{(0.10 \cdot 20)}$$

$$A = \$14778.11$$

Ejemplo 3.3:
Usted decide invertir ¢235000, por lo que se informa en diferentes entidades financieras, que le ofrecen las siguientes opciones, todas a un plazo de 2½ años:

- Financiera Anglo: 8% compuesto, en forma trimestral.
- Banco Tuscatlán: 1 año al 3% y luego todo por 1½ año al 11% (ambos intereses compuestos en forma continua)
- Banco Ganex: 5% compuesto, en forma diaria.

¿Cuánto dinero obtendría en cada una, y cuál escogería para invertir?

Solución

- Financiera Anglo:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} = 235000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4 \cdot 2.5} = 235000 \cdot (1.02)^{10} = ¢286463.69$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

- Banco Tuscatlán:

$A = P \cdot e^{r \cdot t} = 235000 \cdot e^{0.031} = ¢242156.82$, este monto es el nuevo P, por lo que se usa para el siguiente período:

$$A = P \cdot e^{r \cdot t} = 242156.82 \cdot e^{0.11 \cdot 1.5} = ¢285598.09$$

- Banco Ganex:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} = 235000 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365 \cdot 2.5} =$$

$$235000 \cdot (1.000137)^{912.5} = ¢266290.94$$

- De todos los entes financieros, el que nos da mejor resultado es Financiera Anglo.

Ejercicio de Práctica

En los siguientes problemas, determine la cantidad que resulta de cada inversión:

1) $100 al 4% compuesto en forma trimestral, después de 2 años. R/ $108.29

2) $500 al 8% compuesta en forma trimestral, después de $2\,1/2$ años. R/$609.5

3) $600 al 5% compuesto diariamente, después de 3 años. R/ $697.09

4) $10 al 11% compuesto en forma continua, después de 2 años. R/ 12.46

5) $100 al 10% compuesto en forma continua, después de $2\,1/4$ años. R/ $125.23

6) Usted invierte $2000 en un bono que paga el 9% de interés compuesto en forma semestral. Un amigo suyo invierte $2000 en un cerificado de depósito que paga un 8.5% compuesta en forma continua ¿Quién tendrá mas dinero después de 20 años, usted o su amigo? R/ Usted obtiene $11632.73 y su amigo $10947.89

7) Usted esta pensando en adquirir 100 acciones en la bolsa de valores a $15 cada una, sin recibir dividendos. La historia de las acciones indica que deben crecer a una tasa anual del 15% por año. ¿Cuánto valdrán esas acciones dentro de 5 años? R/ $30.17 por acción, ó $3017 las 100 acciones.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejemplo 3.4: Cálculo de P (Valor Presente)

Un bono puede ser amortizado en 10 años por $1000 ¿Cuánto dinero estaría dispuesto a pagar por él ahora si quiere obtener un rendimiento de:

(a) ¿8% compuesto en forma mensual?
(b) ¿7% compuesto en forma continua?

Solución:

(a)Se debe calcular el valor presente P con los datos

A = $1000 n = 12
t = 10 años r = 0.08 (8% escrito en forma decimal)

$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	Se usa la formula de interés compuesto con los datos indicados
$1000 = P\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12(10)}$	Se despeja P de la fórmula
$P = 1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{-(12(10))}$ = $450.52	Se calcula en dato

(b) En este caso se utiliza la fórmula de interés compuesto en forma continua.

$A = P \cdot e^{rt}$ $1000 = P \cdot e^{0.07(10)}$ $P = 1000 \cdot e^{-0.07(10)}$	Se despeja P de la fórmula con los datos dados
P = $496.59	Se debe pagar por el bono

Ejercicios de Práctica

8) En los siguientes ejercicios, indique el capital (P) necesario para obtener la cantidad indicada..

9) Para $100 después de 2 años al 6% compuesto mensualmente. R/ $ 88.72

10) Para $1000 después de 2 años y medio al 6 % compuesto diariamente. R/ $ 860.72

11) Para $600 después de 2 años al 4% compuesto en forma trimestral. R/ $554.09

12) Para $80 después de 3 años y cuarto al 9% compuesto en forma continua. R/ $59.71

13) Para $400 después de 1 año al 10% compuesto en forma continua. R/ $361.93

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

14) Usted acaba de heredar un anillo de diamantes valorado en $5000. Si los diamantes han aumentado de valor con una tasa anual del 8%. ¿Cuál era el valor del anillo hace 10 años cuando fue adquirido? R/ $2315.97

15) El 1 de enero de 1993 se colocaron $3000 en una cuenta de retiro que pagará un interés del 10% anual compuesto de manera continua ¿A cuánto ascenderá la cuenta el 1 de enero del 2008? ¿A cuánto ascenderá si se coloca al 12% compuesto mensualmente? R/ a)13445 b)$17987.41

Ejemplo 3.5: Cálculo de "r" (Tasa de interés)
¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta en forma anual, necesaria para duplicar una inversión en 5 años?

Solución: Si P es el capital y queremos duplicarlo, la cantidad a futuro será A = 2P. Entonces, usando la fórmula de interés compuesto, con:

A = 2P n=1 (anual)
t = 5 años P= $1000

$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	$2P = P(1+r)^5$	Se usa la formula de interés compuesto con los datos indicados
$\frac{2P}{P} = (1+r)^5$	$2 = (1+r)^5$	Se pasa a dividir P y se cancela
$\sqrt[5]{2} = (1+r)^{5\cdot\frac{1}{5}}$	$\sqrt[5]{2} = (1+r)$	Se aplica raíz quinta a ambos lados para poder despejar r
$\sqrt[5]{2} - 1 = r$	$1.148698 - 1 = r$	Se pasa a restar y se calcula r
$r = 0.1487$	$\Rightarrow \quad r = 14.87\%$	En porcentaje.

Ejercicios de Práctica

16) ¿Cuál es la tasa de interés compuesta en forma anual necesaria para duplicar una inversión en 3 años? R/ 26%

17) Una empresa adquirida por $650.000 en 1994 se vende en 1997 por $850.000. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento de esta inversión? R/ 9.35%

18) ¿Cuál es la tasa de interés anual que gana un depósito, que en tres años paso de $100.000 a $180.000 si es compuesto mensualmente? R/ 19.75%

19) ¿Cuál es la tasa de interés compuesta en forma mensual, necesaria para que una inversión pase de $15000 a $38000 en cinco años? R/ 18.735%

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

20) ¿Cuál es la tasa de interés compuesta en forma mensual, necesaria para que una inversión pase de $100000 a $180000 en tres años? R/ 19,75%

Ejemplo 3.6: Cálculo de "t" (Tiempo o plazo de la operación financiera)
Una universidad cuenta con un capital para invertir en infraestructura, pero necesita triplicar el monto que tiene actualmente. ¿Cuántos meses tardará en lograrlo si los invierte al 6.5% anual compuesto mensualmente? ¿Y si la hubiera invertido en forma continúa?

Solución: En este caso los datos que se manejan son los siguientes:

A = 3P n = 12
t = ¿años? P = P
r = 6.5%

(a) Para el modo compuesto mensualmente:

$A = P\cdot(1 + r/n)^{n\cdot t}$ $3P = P\cdot(1+0.065/12)^{12\cdot t}$	Se usa la formula de interés compuesto con los datos
$3 = (1.0054)^{12\cdot t}$ $\ln(3) = 12t\cdot\ln(1.0054)$	Se pasa P a dividir, se aplica ln a ambos lados para bajar el exponente
$t = \ln(3) / (12\cdot\ln(1.0054)) = 16.99$ años	Se despeja t pasando a dividir lo que lo multiplica.
$t = 16.99*12 \rightarrow$ **$t \approx 204$ meses**	Para pasar a meses se multiplica por 12

(b) Para el modo compuesto en forma continua:

$A = P\cdot e^{r\cdot t}$ $3P = P\cdot e^{0.065\cdot t}$	Se usa la fórmula de interés continuo con los datos dados
$3 = e^{0.065\cdot t}$ $\ln(3) = 0.065\cdot t$	Se aplica ln a ambos lados para poder despejar t
$t = \ln(3)/0.065 = 16.90$ años	Se pasa a dividir lo que multiplica a t
t= 202.8 meses	Se multiplica por 12 para tener los meses

Ejercicios de Práctica

21) ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si se ha contratado al 8% compuesto mensualmente? ¿Y compuesto en forma continua?
R/ 104.32 meses y 103.97 meses respectivamente.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

22) ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $10.000 crezca hasta $25.000? Suponga una tasa de interés del 6% compuesto en forma continua.
R/ 15.27 años

23) ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $100 crezca hasta $150?
- Suponga una tasa de interés del 8% compuesto en mensualmente. R/ 61.02 meses
- Suponga una tasa de interés continuo. R/ 60.82 meses

24) ¿Cuantos años tardara en duplicarse una inversión, si la tasa de rendimiento es del 21.5% compuesto trimestralmente? R/ 3.31 años

Ejercicios adicionales

25) Usted decide invertir $3000 en diferentes entidades financieras de la siguiente forma:
- El primer año y medio trabaja al 5% compuesto en forma trimestral.
- El dinero obtenido luego lo trabaja por dos años y medio al 10% compuesto en forma continua.

a) ¿Cuánto dinero obtiene el final de los 4 años? R/$4150.16
b) ¿Cuántos meses hubiera tardado la inversión inicial en duplicar su valor si la hubiera contratado al 8% anual compuesto mensualmente? R/ 104.32 meses

26) Usted acaba de adquirir una casa, la cual tiene una hipoteca de $50000, y se compromete a pagarle al vendedor $50000 más el interés acumulado en 5 años a partir de ahora. El vendedor le ofrece dos opciones de interés sobre la hipoteca:
a) 11.25% de interés compuesto en forma continua.
b) 11.5 % de interés compuesto mensualmente.

¿Cual opción es la mejor?

27) Se invierten $10000 en un fondo de ahorro en el cual el interés se compone continuamente a una tasa de 11% anual.
a) ¿Cuando habrá $35000 en la cuenta? R/ 11.38 años.
b) ¿Cuánto tiempo necesita para duplicar la cantidad de dinero? R/ 6.3 años.

28) ¿A qué interés compuesto anualmente deben invertirse ¢100000, para que se duplique en 15 años? R/ 4.7%

29) ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicarse al 8% anual compuesto semestralmente? R/ 8.8 años

30) ¿A qué interés compuesto anualmente deben invertirse $100 para que se dupliquen en 12 años? R/ 5.94%

31) Si se invierten $ 6000 al 7% de interés anual compuesto trimestralmente, ¿cuánto se tendrá acumulado en 7 años? R/ $ 9752.5

32) ¿Qué cantidad de dinero, invertida hoy al 4.5% de interés compuesto trimestralmente, se convertirá en $5000 al final de 18 años? R/$2294

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

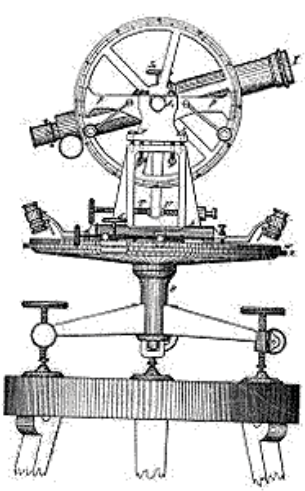
4. TRIGONOMETRÍA

La historia de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las matemáticas.

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa.

Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.



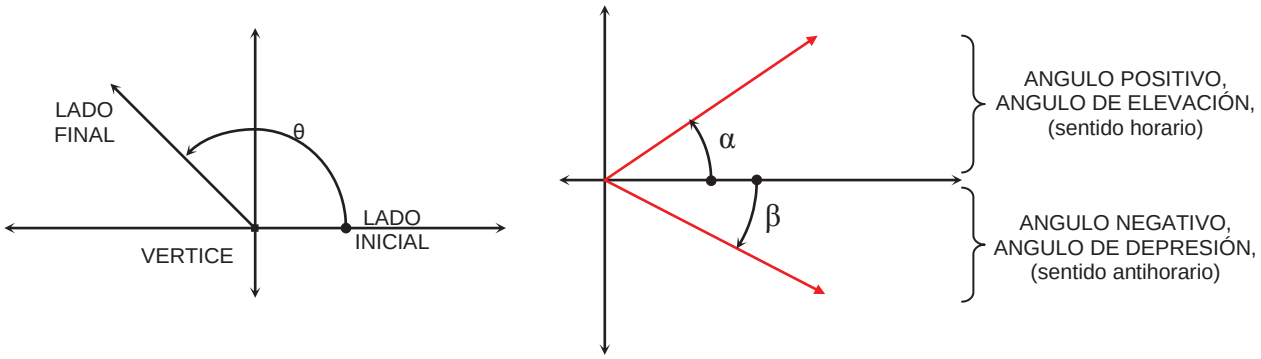
Para medir terrenos, los **topógrafos** los dividen en triángulos y marcan cada ángulo con un "punto de referencia", que hoy en día es, a menudo, una placa de latón redonda fijada en el suelo con un agujero en el centro, sobre el que ponen sus varillas y teodolitos
A estos puntos se les conoce como “monumentos” o “mojón”
(George Washington hizo este trabajo cuando era un adolescente)

4.1 Conceptos básicos

ANGULO

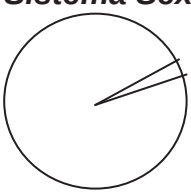
Es la abertura formada por dos semirrectas (***lado inicial*** y ***lado final***) con un mismo origen (***vértice***). Usualmente parte de un sistema cartesiano de ejes, de manera que el lado inicial coincide con el eje +x, y el vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total



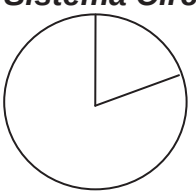
En las calculadoras podremos hallar las tres formas de medir los ángulos:

- ***Sistema Sexagesimal***: modo en la calculadora: **DEG** o **D**



1 círculo = 360 partes iguales = 360º
1º = 60 minutos = 60'
1' = 60 segundos = 60"
Por ejemplo: 30º15'35" = 30.259722º º ' "

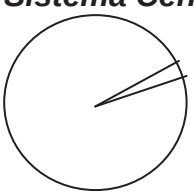
- ***Sistema Circular***: modo en la calculadora: **RAD** o **R**



1 radián = es la abertura entre 2 semi-rectas de longitud r y cuya longitud de arco entre ellas es r también.

Su relación con el sistema sexagesimal es: $\frac{S}{180^o} = \frac{R}{\pi}$

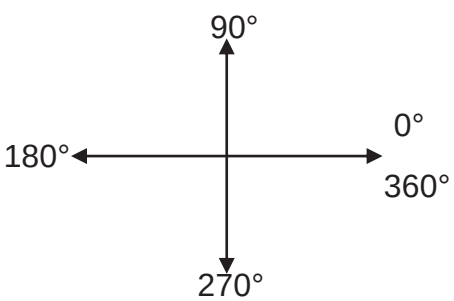
- ***Sistema Centesimal***: modo en la calculadora: **GRAD** o **G**



1 círculo = 400 partes iguales = 400º
1º = 100 minutos cent. = 100'
1' = 100 segundos cent. = 100"

EJES CARTESIANOS

No podemos dejar de lado también el concepto de ejes cartesianos. Estos se forman al dividir el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes mediante dos rectas perpendiculares entre sí (horizontal y vertical respectivamente). Dichas rectas se cortan en un punto que recibe el nombre de ***origen de coordenadas***.



® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

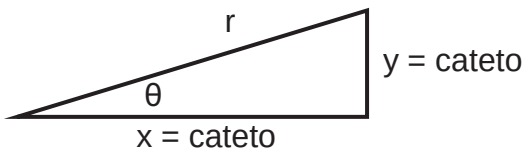
Las funciones trigonométricas son valores sin unidades que dependen de la magnitud de un ángulo. Se dice que un ángulo situado en un plano de coordenadas rectangulares está en su posición normal si su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

El estudiar los ángulos nos permite definir las funciones trigonométricas, las cuales se pueden estudiar de dos formas:

- Por las relaciones entre catetos y la hipotenusa de un TRIÁNGULO RECTÁNGULO
- Por los ángulos de rotación en el plano cartesiano

Del triángulo rectángulo:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ donde



Las seis funciones trigonométricas más utilizadas se definen de la siguiente manera:

seno (sen) del ángulo θ $= \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$

coseno (cos) del ángulo θ $= \cos\theta = \frac{x}{r}$

tangente (tg) del ángulo θ $= \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$

cotangente (cotg) del ángulo θ $= \text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$

secante (sec) del ángulo θ $= \sec\theta = \frac{r}{x}$

cosecante (cosec) del ángulo θ $= \text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$

Dadas sus rspecftivas definiciones, tres funciones son las inversas de las otras tres:

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

INVERSA TRIGONOMÉTRICA

Cómo su nombre lo indica, hace la operación inversa de las funciones trigonométricas:

- Funciones trigonométricas: se utilizan cuando se quiere conocer la relación entre 2 lados de un triángulo rectángulo, y lo que se conoce es el valor de un ángulo interno.
- Inversa trigonométrica: se utiliza cuando se quiere conocer el valor de un ángulo interno, y lo que se conoce es el valor de la relación entre 2 lados del triángulos rectángulo.

El siguiente cuadro se indica claramente la relación entre ambos conceptos.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

RAZÓN	EN EL TRIÁNGULO	INVERSA TRIGONOMÉTRICA	RELACIÓN
senθ	$\frac{opuesto}{hipotenusa}=\frac{y}{r}$	$\arcsin\left(\frac{y}{r}\right)=\theta=\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$	$\frac{1}{\csc\theta}$
cosθ	$\frac{adyacente}{hipotenusa}=\frac{x}{r}$	$\arccos\left(\frac{y}{r}\right)=\theta=\cos^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$	$\frac{1}{\sec\theta}$
tanθ	$\frac{opuesto}{adyacente}=\frac{y}{x}$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
cscθ	$\frac{hipotenusa}{opuesto}=\frac{r}{y}$		$\frac{1}{\sin\theta}$
secθ	$\frac{hipotenusa}{adyacente}=\frac{r}{x}$		$\frac{1}{\cos\theta}$
cotθ	$\frac{adyacente}{opuesto}=\frac{x}{y}$		$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS

Se refiere a fórmulas que muestran las relaciones entre las diversas funciones trigonométricas, que se cumplen para cualquier ángulo, o pareja de ángulos. También se les conoce como IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS			
1	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	**6**	$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\sin b\cdot\cos a$
2	$1+\tan^2 x=\sec^2 x$	**7**	$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$
3	$\cot^2 x+1=\csc^2 x$	**8**	$\cos 2u=\cos^2 u-\sin^2 u$ $\cos 2u=2\cdot\cos^2 u-1$ $\cos 2u=1-2\cdot\sin^2 u$
4	$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$		
5	$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$	**9**	$\sin 2u=2\cdot\sin u\cdot\cos u$

Otra identidad muy útil es la siguiente: $\boxed{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

4.2 Cálculo de funciones trigonométricas y valores de ángulos

USO DE CALCULADORA

En las calculadoras científicas solo se tienen las funciones principales, seno, coseno, tangente y sus inversas trigonométricas arcsen, arccos, arctan.

Para calcular las otras funciones se tiene que usar la relación del cuadro anterior.

Si el ángulo esta en grados use la calculadora en modo 4 o deg Si el ángulo esta en radianes (fracciones de π) en modo 5 o rad

Las razones trigonométricas establecen 6 relaciones diferentes entre las distancias establecidas del triángulo rectángulo: r, x, y.
Las inversas trigonométricas nos sirven para calcular el ángulo θ.

En cuanto a la medición de ángulos, se usarán los GRADOS y los RADIANES. Ya se mencionó anteriormente la forma de hacer la conversión entre estas 2 unidades, pero la repasamos nuevamente:

- Para convertir de GRADOS a RADIANES:

$$\theta \cdot \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right)$$, donde θ es el ángulo dado.

- Para convertir de RADIANES a GRADOS:

$$\theta \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)$$, donde θ es el ángulo dado.

En el caso del uso de la calculadora, sólo tienen las funciones principales seno, coseno y tangente y sus inversas trigonométricas arcsen, arccos y arctan.

Para calcular las otras funciones se tiene que usar las relaciones del cuadro anterior.

Ejemplo 1: A continuación se muestra un ejemplo de cálculo de ángulos usando la calculadora.

Usando el modo DEG de la calculadora, calcule:

sec 67º = 1 / cos 67º = 2.559

csc 43º = 1 / sen 43º = 1.466

cot 9º = cos 9º / sen 9º = 6.314

Usando el modo RAD de la calculadora, calcule:

csc (π/3) = 1 / sen (π/3) = 1.155

sec (2π/3) = 1/cos (2π/3)= -2

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

1) $sen73°$ $R/0.956$

2) $\tan 22°$ $R/0.404$

3) $\sec 55°$ $R/1.743$

4) $\cos 23°$ $R/0.920$

5) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $R/0.866$

6) $sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ $R/-1$

7) $\sec\left(\frac{-\pi}{8}\right)$ $R/1.082$

8) $\frac{\sqrt{3}sen45° + \sqrt{2}\cos 30°}{\tan 60°}$ $R/1.414$

9) $\frac{sen^2 30° + \cos^2 30° - 1}{\tan 30° \sec 45°}$ $R/0$

10) $\frac{2\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)}{4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ $R/2.866$

11) $\frac{\csc^2 270° + \sec^2 30° - 1}{\tan 0° + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan 45°}$ $R/\frac{2}{3}$

12) $\frac{\tan\pi - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi)}{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ $R/0.5$

13) $\frac{\pi\ sen^2\pi - \pi^2\cos(\pi)^2}{\tan^3\pi + \pi^2}$ $R/-1$

14) $x = \frac{\pi}{3}$ $\frac{\cot x - 2\cos x^2}{x^2 - \pi\ senx}$ $R/0.876$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

15) $x=\pi \quad \dfrac{sen^2 x-2x\sec x^2}{x^2-\pi\ senx} \qquad R/-0.637$

16) $x=\dfrac{\pi}{3} \quad \dfrac{\csc^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)-2\cos x^2}{x^2-\pi\ senx} \qquad R/0.6157$

17) $\dfrac{\csc 45°-\sec\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\tan^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} \qquad R/-0.0976$

18) $\dfrac{(\tan 60°-\sec 60°)^2}{sen^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} \qquad R/0.0479$

19) $\dfrac{(\tan 60°-\tan 30°)}{sen^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)} \qquad R/1.154$

20) $\dfrac{2sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-4sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} \qquad R/-6.463$

Cálculo de ángulos a partir de una razón trigonométrica

Ejemplo 2:Cálculo de ángulos usando la calculadora

tan θ = 2.64 θ = arctan(2.64) θ = $\tan^{-1}$(2.64) θ = 69.25°	sec α = 6/5→ 1 / cosα = 6/5 5/6 = cosα α = arccos(5/6) = $\cos^{-1}$(5/6) α = 33.56°
sec β = 1.044 1 / cosβ = 1.044 1 / 1.044 = cosβ β = arcos(1 / 1.044) = 16.69°	cot θ = 7/24 tanθ = 24/7 θ = arctan (24/7) = $\tan^{-1}$(24/7) θ = 73.74°

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

De el valor del ángulo “x” en grados con 0.01 unidades de aproximación

21) $\cos x = \frac{8}{17}$ $R/x = 61.93^{\circ}$

22) $\tan x = 2.64$ $R/x = 69.25°$

23) $\csc x = 3.14$ $R/x = 18.57°$

24) $sen x = \frac{3}{5}$ $R/x = 36.87°$

25) $\cos x = \frac{8}{17}$ $R/x = 61.93°$

26) $\tan x = \frac{5}{12}$ $R/x = 22.62°$

27) $\csc x = 4$ $R/x = 14.48°$

28) $\sec x = \frac{6}{5}$ $R/x = 33.56°$

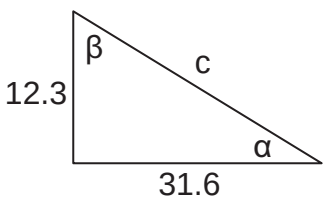
® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

4.3 Triángulos rectángulos

¿Por qué triángulos? Porque son los bloques básicos de construcción para cualquier figura rectilínea que se pueda construir. El cuadrado, el pentágono u otro polígono puede dividirse en triángulos por medio de líneas rectas radiando desde un ángulo hacia los otros.

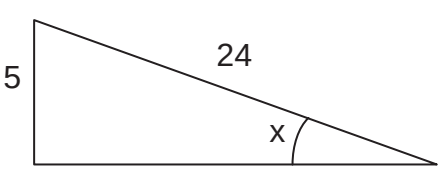
Entre las diversas aplicaciones prácticas de la trigonometría está la de determinar distancias que no se pueden medir directamente. Estos problemas se resuelven tomando la distancia buscada como el lado de un triángulo, y midiendo los otros dos lados y los ángulos del triángulo.

Ejemplo 3: Usando el Teorema de Pitágoras, calcule las variables indicadas

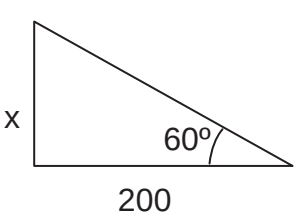
	Calcular los valores de los ángulos indicados, así como el valor de "c"
$c = \sqrt{12.3^2 + 31.6^2} = 33.9$	Usando el teorema de Pitágoras calculamos c
$\tan\alpha = \frac{12.3}{31.6} = 0.389$	Usando la función que relaciona el opuesto y el adyacente.
α = arctan(0.389)	Se usa el inverso trigonométrico para obtener el valor del ángulo
β = 90° - α = 90° - 23.1°→ β = 68.7°	La suma de todos los ángulos internos es 180° por lo tanto $\alpha + \beta = 90°$ despejando se tiene el valor de β

Ejercicios de práctica

De las siguientes figuras, calcule las variables indicadas.

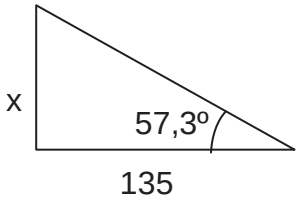
29) 

R/ $x = 12.026°$

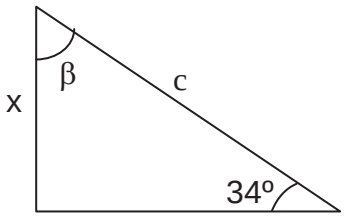
30) 

R/ x= 346.44

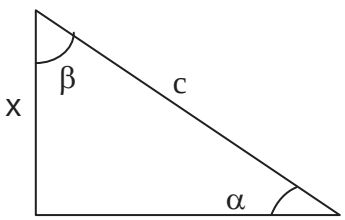
® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

31) 

R/ x= 210.5

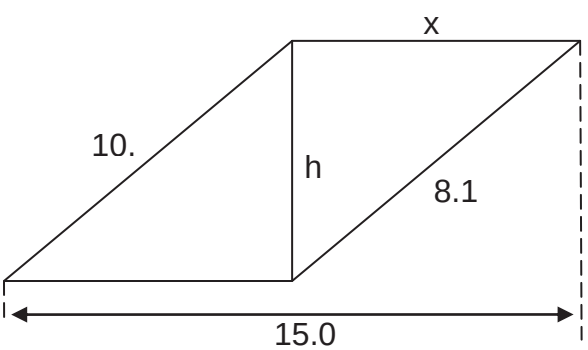
32) 

R/ x=7.08, c=12,67, β=56º

33) 

x=6
secβ=1.1547

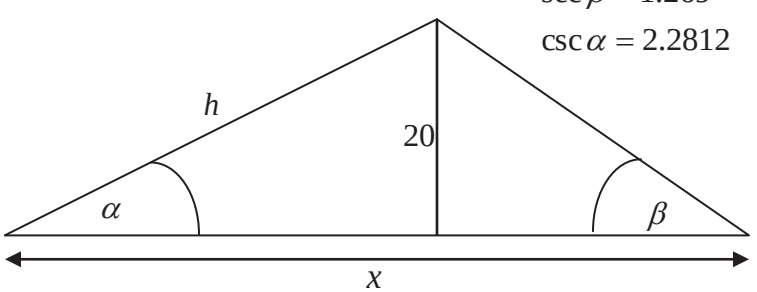
R/ β=30º, α=60º
d=3,464, c=6,93

34) 

R/ x=5.03, h=6.35

$\sec\beta = 1.269$

$\csc\alpha = 2.2812$

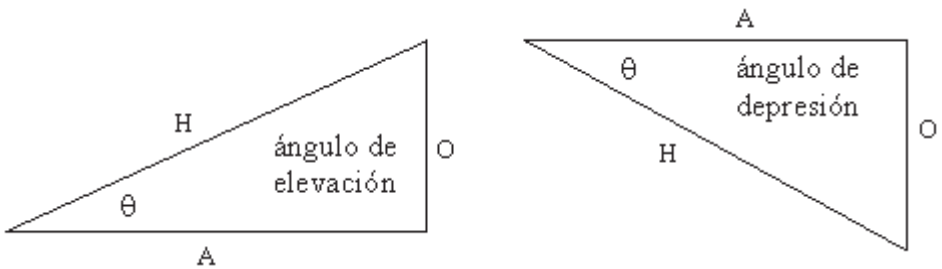
35) 

R/ β=38º, α=26º
h=45,62, c=66,6

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

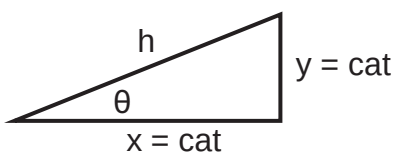
4.4 Problemas de aplicación usando Triángulos rectángulos

En el primer triángulo, θ es un "ángulo de elevación" y en el segundo es un "ángulo de depresión":



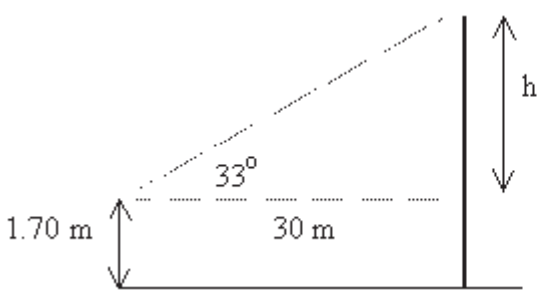
En este tipo de problemas es de vital importancia dominar los conceptos vistos anteriormente, y que detallamos nuevamente, guiándonos con la figura adjunta:

- Teorema de Pitágoras: $h^2 = x^2 + y^2$
- Función trigonométrica "seno": $sen\theta = \frac{y}{h}$
- Función trigonométrica "coseno": $\cos\theta = \frac{x}{h}$
- Función trigonométrica "tangente": $\tan\theta = \frac{y}{x}$



Ejemplo 4: Un observador tiene un nivel visual de 1.70 m de altura, y se encuentra a 30 m de una antena. Al ver la punta de la antena, su vista forma un ángulo de elevación de 33^o. ¿Cuál es la altura de la antena?

Solución: Utilizamos la siguiente figura, en la cual calcularemos h primero.



$\tan 33^\circ = h/30$

$h = 30 \tan 33^\circ$

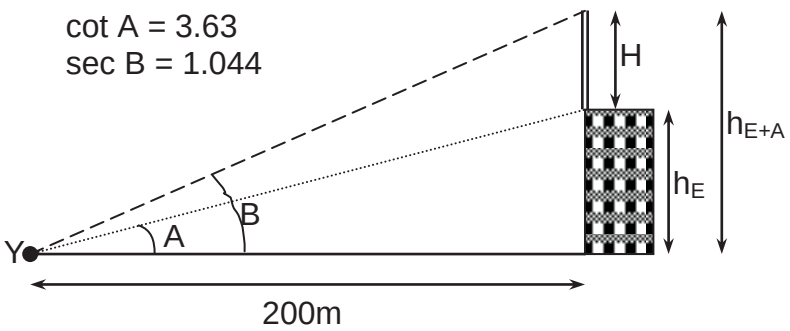
$h = 19.48$ m

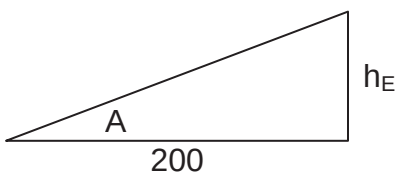
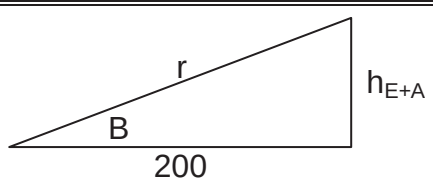
Por lo tanto:

(Altura de antena) = h + (nivel visual del observador)
(Altura de antena) = 19.48 + 1.70
(Altura de antena) = 21.18 m.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

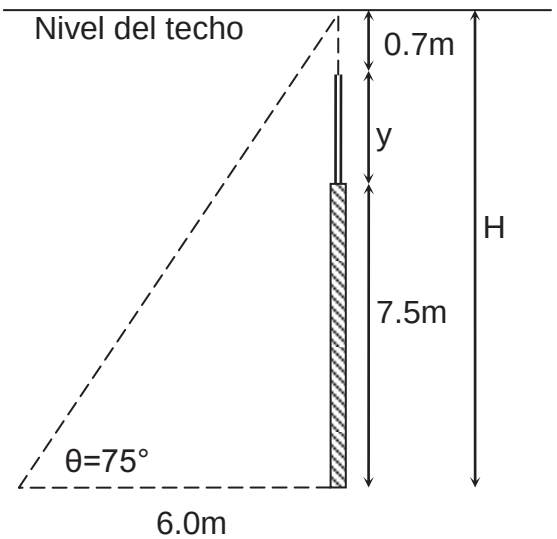
Ejemplo 5: Desde un punto "Y" situado a 200 metros de un edificio, se observa una antena en la azotea del mismo.. Desde "Y" se miden 2 ángulos de elevación "A" y "B" y se indica la información adjunta. Determine la altura de la antena.



cot A = 3.63 1 / tan A = 3.63 sec B = 1.044 1 / cos B = 1.044	Determinar el valor de los ángulos usando la identidad trigonométrica
tan A = 0.275 → A = arctan (0.275) = 15.376° cos B = 0.958 → B = arccos(0.958) = 16.665°	Usar la inversa trigonométrica
 tan 15.376° = h_E / 200 h_E = 200·tan 15.376° = 55.00	Separar los dos triángulos rectángulos y usar una identidad que relaciones los datos que se tienen.
 tan 16.665° = h_{E+A} / 200 h_{E+A} = 200·tan 16.665° = 59.87m H = h_{E+A} – h_E = 59.87 – 55.00 **H = 4.87m**	Se usa tangente nuevamente para calcular la altura hasta la

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejemplo 6: Se tiene una estructura de 7.5m de altura, a la cual debe añadirse otro tramo de estructura, con la limitación de que juntas deben quedar a 0.70m por debajo del nivel del techo de la bodega donde se encuentran. Para esto, un observador a 6m de distancia de la base de la estructura midió un ángulo de 75º entre la base de la estructura y el techo. Indique la altura del tramo de estructura que debe agregarse.



Sea "y" la altura de la estructura a agregar. Del esquema se deduce que:

$\tan 75° = H / 6m$

$H = 6 \cdot \tan 75° = 22.39m$

Se tiene entonces que:

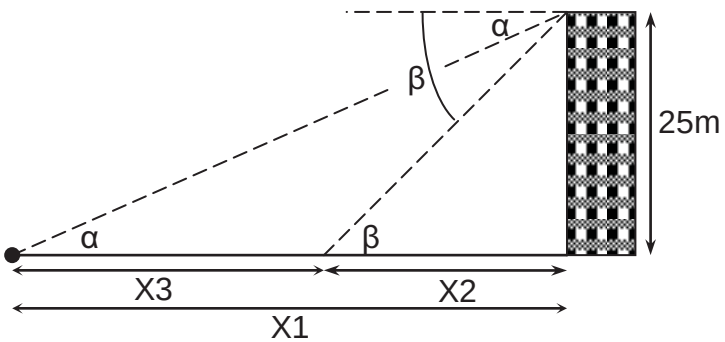
$H = 7.5 + y + 0.7$

$y = H - (7.5 + 0.7)$

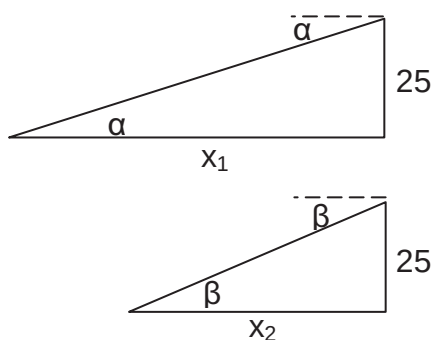
$y = 22.39 - 8.20$

$y = 14.19m$

Ejemplo 7: Desde la azotea de un edificio de 25m de altura, una persona observa un auto que se aleja. Si el ángulo de depresión del observador cambia 45° a 20° mientras observa al auto, encuentre la distancia que este ha recorrido.



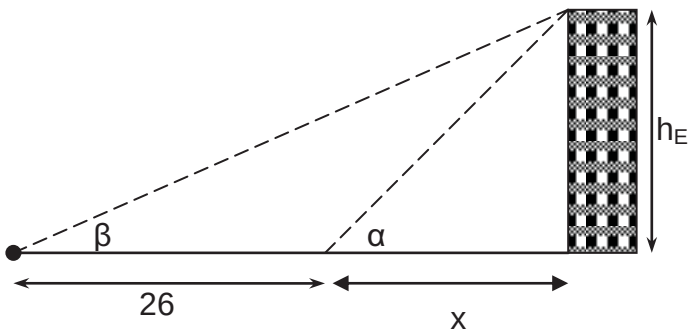
$\alpha = 20°$
$\beta = 45°$

	Se separan los dos triángulos rectángulos del problema y se trasladan los ángulos dentro del triángulo.
$\tan \alpha = 25 / x_1$	Del primer triángulo se relaciona con

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

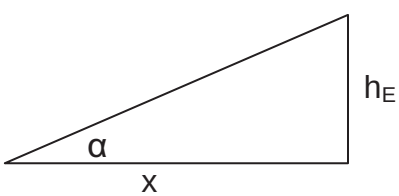
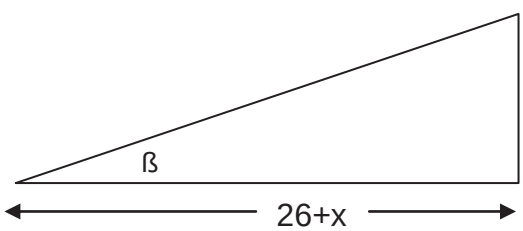
$x_1 = 25 / \tan 20°$ $x_1 = 68.7m$	tangente y se obtiene el valor de x_1
$\tan \beta = 25 / x_2$ $x_2 = 25 / \tan 45°$ $x_2 = 25.0m$	Del segundo triángulo se calcula x_2
$x_3 = x_1 - x_2$ $x_3 = 68.7 - 25.0 \quad \rightarrow \quad$ **$x_3 = 43.70$ m**	Por diferencia se obtiene la distancia recorrida

Ejemplo 8: Un hombre se dirige a un edificio, y se detiene observando que el ángulo de elevación a la cúspide es 55°. Avanza 26 m en línea recta, se vuelve a detener y observa que el nuevo ángulo de elevación es de 68.2º Encuentre la altura del edificio.



$\alpha = 68.2°$

$\beta = 55°$

 $\tan \alpha = h_E / x$ $x = h_E / \tan \alpha$ $x = h_E / \tan 68.2°$	Se separan los triángulos rectángulos, usando tangente se despeja el valor de x
 $\tan \beta = h_E / (26+x)$ $26 + x = (h_E / \tan \beta)$ $x = (h_E / \tan 55°) - 26$	En el segundo triángulo también se despeja el valor de x
$x = x$ $h_E / \tan 68.2° = (h_E / \tan 55°) - 26$ $h_E = \tan 68.2° \cdot (h_E / \tan 55°) - 26 \cdot \tan 68.2°$ $h_E = 1.751 \cdot h_E - 65.005$ $0.751 \cdot h_E = 65.005$ **$h_E \approx 87$m**	Se igualan los términos de x para despejar h_E La altura del edificio es aproximadamente 87 metros

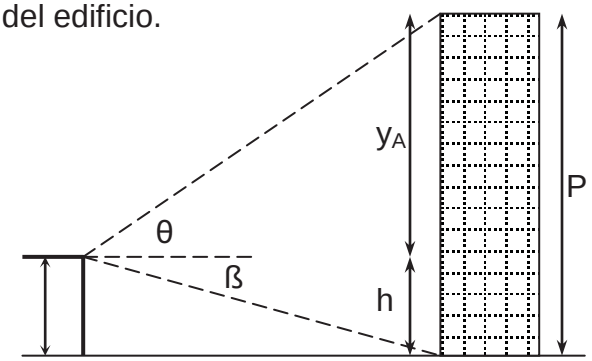
® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

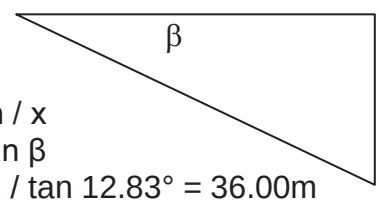
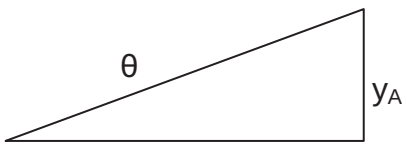
Ejemplo 9: Desde un punto "A" situado a 8.2 metros de altura, el ángulo de elevación a la punta del edificio es de 31,33º' y el ángulo de depresión a la base del mismo es de 12,83º . Calcule la altura del edificio.

h = 8.2 m

θ = 31.33°

β = 12.83°



x  tan β = h / x x = h / tan β x = 8.2m / tan 12.83° = 36.00m	Se separan los dos triángulos rectángulos que se forman. Se utiliza tangente para determinar el valor de x.
 tan θ = y_A / x y_A = 36.00· tan 31.33° = 21.91m H = y_A + h = 21.91 + 8.2 **H = 30.11m**	En el segundo triángulo también se utiliza el valor de x, y se usa tangente para calcular y_A Sumando las alturas obtenemos la altura total del edificio 30.11 m

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

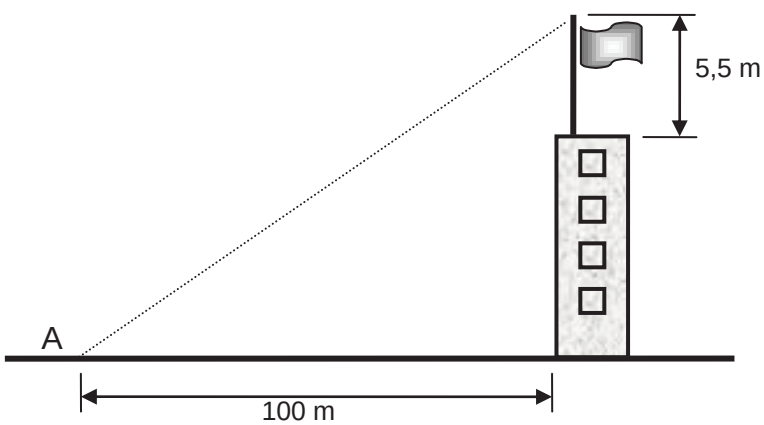
36) Un observador tiene un nivel visual de 1.40 m de altura, y se encuentra a 65 m de un árbol. Al ver la punta del árbol, su vista forma un ángulo de elevación de 24^o. ¿Cuál es la altura del árbol? ("nivel visual" se refiere a una línea horizontal imaginaria ubicada al nivel de los ojos de una persona) R/ 30.3 m

37) Un observador sobre un edificio tiene un nivel visual de 1.50 m de altura. Al ver un automóvil estacionado, el ángulo de depresión de su vista es de 52^o. Si la base del edificio se encuentra a 70 m del automóvil, ¿cuál es la altura del edificio? R/ 53.19

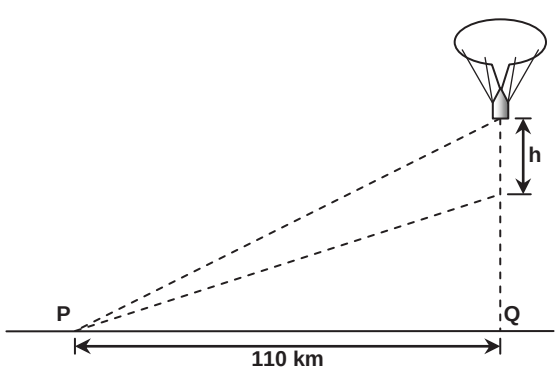
38) Un observador tiene un nivel visual de 1.80 m de altura. Al ver la punta de un árbol de 15 m de altura, su vista forma un ángulo visual de elevación de 41^o. ¿A qué distancia horizontal se encuentra el observador de la base del árbol? R/17.25^o

39) Un observador sobre un muelle tiene un nivel visual de 1.30 m. El muelle sobresale 2.45 m por encima del agua. Al mirar una roca, el ángulo de depresión de su vista es de 17^o. ¿Cuál es la distancia mínima (diagonal) entre los ojos del observador y la roca? R/ 12.83

40) El asta de una bandera, se encuentra en la parte superior de un edificio. Desde un punto A situado a 100 m del edificio el ángulo de elevación de la parte inferior del asta es de $30{,}26^o$. Si la altura del asta es de 5.5m de alto,. Calcule el ángulo de elevación, con que se observa la parte superior del asta, desde el punto A. R/ 32.56 **º**.



41) Cuando un globo aerostático sube verticalmente su ángulo de elevación desde un punto P, cambia de $19^o20'$ a $31^o50'$. Si P está sobre el terreno horizontal a 110 km de distancia del punto Q (directamente bajo el globo) calcule el ascenso aproximando "h" alcanza el globo bajo estas circunstancias. R/ 29.7km

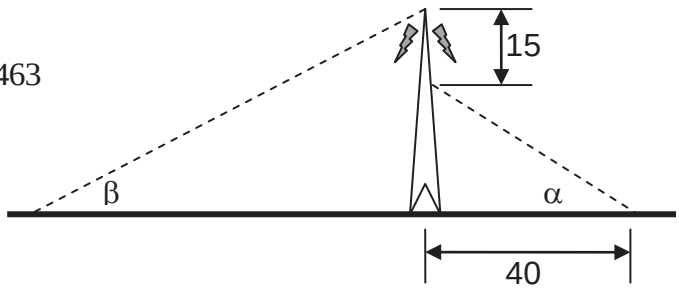


® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

42) Se tiene una antena de radio sujeta a cada lado por dos cables que sirven de tensores. Los tensores y la base de la antena están alineados de tal forma que proyecta una línea recta en el suelo. El primer tensor sujeta la antena desde la cúspide y está sujeto al suelo a una distancia de 40 m de la base de la antena, mientras que el segundo tensor sujeta la antena 15 m más abajo de la cúspide. Encuentre la longitud de cada uno de los cables tensores, considerando además la información de los ángulos que se da adicionalmente. R/ 47, 13.69

$\csc\beta = 1.90463$

$\csc\alpha = \sqrt{2}$

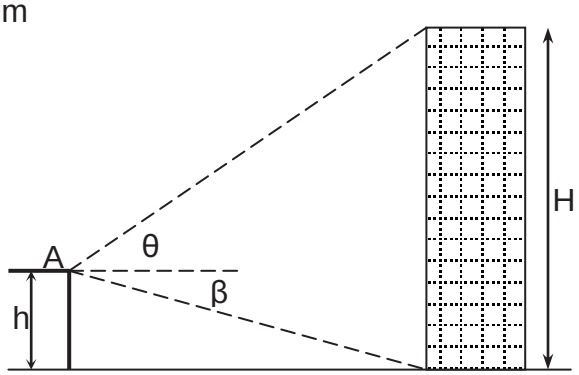


43) Desde un punto "A" situado a 12 metros de altura, el ángulo de elevación a la punta del edificio es de 35,33º' y el ángulo de depresión a la base del mismo es de 15,83º. Calcule la altura H del edificio. R/ 42 m

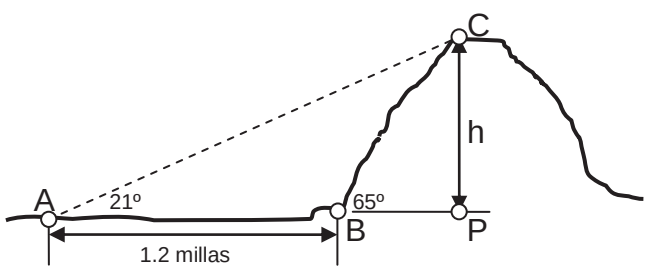
h = 12 m

θ = 35,33°

β = 15,83°



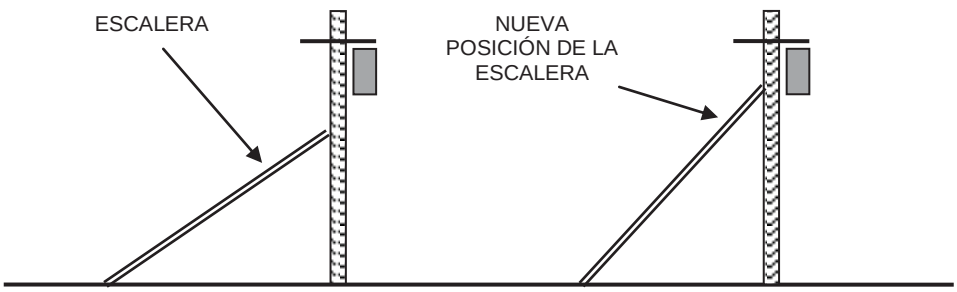
44) Un teleférico transporta pasajeros del punto A al punto C. El punto A está a 1.2 millas del punto B en la base de la montaña. Los ángulos de elevación desde A y B hacia C son 21° y 65°, respectivamente. Indique la distancia aproximada de A a P, y la altura aproximada de la montaña. R/ Dist. AP =1.566 millas, y h=0.562 millas



45) Un observador P, situado a la izquierda de una colina observa la cima de la misma con un ángulo de elevación de 29,6º. Un observador Q, situado a la derecha de la colina, observa la cima con un ángulo de elevación de 35,3º. Si la colina tiene 200m de altura con respecto al nivel de los observadores, indique la la distancia entre P y Q? R/ 634.53 m

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

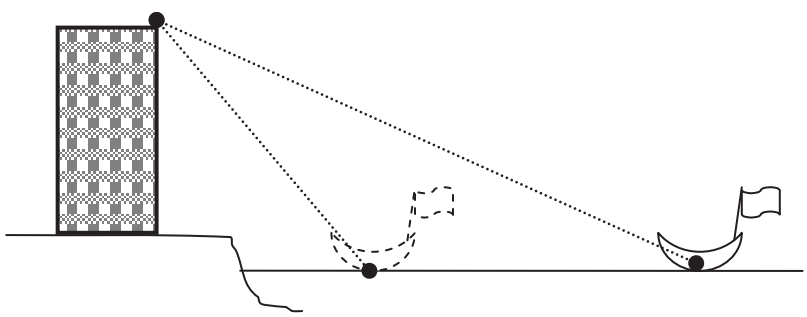
46) Una escalera de 8.65m de largo descansa sobre un poste del tendido eléctrico y el ángulo que forma la escalera y el poste es de 58º. El operario se percata de que la escalera podría resbalar debido a que el punto de apoyo en el poste está muy bajo, por lo que la vuelve a colocar de forma que la distancia entre el poste y la parte inferior de la escalera queda en 1.75 m Encuentre distancia entre el primer punto de apoyo en la pared, y el nuevo punto de apoyo en la pared. R/ 3.887 m



47) Una escalera de 20 pies de largo descansa sobre la pared de un edificio. Si el ángulo que se forma entre la escalera y el edificio es de 22^o ¿A qué distancia del edificio esta el punto de apoyo de la escalera en el suelo?. Si se incrementa en 3 pies ¿Qué tanto se mueve la parte superior de la escalera hacia abajo? R/ 7.49pies y 1.51pies respectivamente.

48) En una planta de procesamiento de alcohol, a partir de caña de azúcar, se tiene un equipo de destilación cuya torre (vertical) tiene una altura de 6.5 m. A esta torre se le quiere añadir en la parte superior un equipo extra que debe quedar a 0.5 m del techo. Se necesita saber la altura máxima que debe ocupar este equipo extra y debido a que es imposible medir la altura directamente. Un observador a 5 m de distancia de la base de la torre mide un ángulo de 7^0 entre la parte superior de la torre y el techo ¿Que altura puede tener el equipo? R/ 6.73m

49) Desde la azotea de un hotel de playa, un hombre observa un bote que navega directamente hacia él. Si el hombre se encuentra a 100 metros sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión del bote cambia de 20^0 a 35^0 durante el periodo de observación, encuentre la distancia aproximada que ha recorrido el bote durante ese tiempo. R/ 132 m



50) Un poste de tendido eléctrico con una altura de 10 metros, tiene dos anclajes. Uno de los cables es 4 metros más largo que el otro y el ángulo que se forma entre el suelo y el cable más corto es de 68º. Calcule entonces:

a) La longitud de cada cable? R/ 10.785 m y 14.785 m
b) El ángulo que se forma entre el cable más largo y el suelo. R/ 42.56º
c) La distancia de separación entre los cables. R/ 14.93m

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

4.5 Identidades trigonométricas.

Se le llama así a las igualdades en las que aparecen expresiones trigonométricas. Además estas "igualdades" siempre se cumplen, sea cual sea el valor del ángulo o ángulos involucrados. Aunque anteriormente se habían mencionado, nuevamente las repasamos en la siguiente tabla:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS			
1	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	**6**	$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\sin b\cdot\cos a$
2	$1+\tan^2 x=\sec^2 x$	**7**	$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$
3	$\cot^2 x+1=\csc^2 x$	**8**	$\cos 2u=\cos^2 u-\sin^2 u$ $\cos 2u=2\cdot\cos^2 u-1$ $\cos 2u=1-2\cdot\sin^2 u$
4	$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$		
5	$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$	**9**	$\sin 2u=2\cdot\sin u\cdot\cos u$

Procedimiento para la demostración de identidades:

1. Si hay ángulos dobles o medios sustituir por las identidades 8 ó 9 de la tabla.
2. Si hay suma o restas dentro de los ángulos sustituir por identidades 4 a 7 de la tabla.
3. Si hay términos al cuadrado, ver si se puede sustituir por identidades 1 a 3 de la tabla.
4. Sustituir todo en términos de seno y coseno, utilizando también las relaciones básicas entre las funciones trigonométricas, a saber:

$$\csc\theta=\frac{1}{sen\,\theta} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Hay que recordar para en el caso de las identidades trigonométricas, se trabaja desarrollando o simplificando (según sea el caso) sólo un lado de la expresión. Esto lejos de ser un problema, va a facilitar la comprobación de la identidad, ya que sabemos a cual resultado vamos a llegar.

Ejemplo 10: Demuestre la siguiente identidad

$\dfrac{1+\sec x}{\sin x+\tan x}=\csc x$	Pasar a senx y cosx
$\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos x}}{\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\csc x$	Unir con común denominador

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

$\dfrac{\dfrac{\cos x+1}{\cos x}}{\dfrac{\sin x\cdot\cos x+\sin x}{\cos x}}=\csc x$	Multiplicar extremos y medios
$\dfrac{(\cos x+1)\cdot\cos x}{\cos x\cdot(\sin x\cdot\cos x+\sin x)}=\csc x$	Simplificar y sacar a factor común
$\dfrac{\cos x+1}{\sin x\cdot(\cos x+1)}=\csc x$	Simplificar de nuevo
$\dfrac{1}{\sin x}=\csc x \quad\Rightarrow\quad \csc x=\csc x$	Se comprueba la identidad

Ejemplo 11: Demuestre la siguiente identidad

$\dfrac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}=-\cos 2x$	Pasar a senx y cosx
$\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)-\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)+\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)}=-\cos 2x$	Unir con común denominador
$\dfrac{\left(\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}\right)}{\left(\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}\right)}=-\cos 2x$	Hacer extremos y medios.
$\dfrac{(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot\cos x\cdot\sin x}{(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot\cos x\cdot\sin x}=-\cos 2x$	Usar la identidad $sen^2x+cos^2x=1$ Simplificar lo que se pueda.
$\dfrac{(\sin^2 x-\cos^2 x)}{1}=-\cos 2x$	Verificar en la lista de identidades
$-\cos 2x=-\cos 2x$	Identidad comprobada

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejemplo 12: Demuestre la siguiente identidad

$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$	Pasar a senx y cosx
$\frac{1-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta} = \tan\theta$	Multiplicar el negativo
$\frac{1-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta} = \tan\theta$	Usar la identidad $Sen^2x=1-\cos^2x$
$\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta}{2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta} = \tan\theta$	Sumar los $\sin^2x$.
$\frac{2\cdot\sin^2\theta}{2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta} = \tan\theta$	Simplificar lo que se pueda
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \tan\theta$	Identidad comprobada

Ejemplo 13: Demuestre la siguiente identidad

$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{\cos x} = 2\cdot\tan x$	Unir con común denominador
$\frac{\cos^2 x-(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)\cdot\cos x} = 2\cdot\tan x$	Desarrollar fórmula notable
$\frac{\cos^2 x-(1-2\sin x+\sin^2 x)}{(1-\sin x)\cdot\cos x} = 2\tan x$	Multiplicar por el -
$\frac{(\cos^2 x-1)+2\sin x-\sin^2 x}{(1-\sin x)\cdot\cos x} = 2\tan x$	Pasar a términos de senx
$\frac{2\sin x-2\sin^2 x}{(1-\sin x)\cdot\cos x} = 2\tan x$	Factorizar
$\frac{2\sin x\cdot(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cdot\cos x} = 2\tan x$	Simplificar
$\frac{2\sin x}{\cos x} = 2\tan x \quad \Rightarrow \quad 2\tan x = 2\tan x$	Identidad comprobada

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

51) $\cos x \tan x = sen x$

52) $\cos x \cot x + sen x = \csc x$

53) $sen x(\csc x - sen x) = \cos^2 x$

54) $\tan x sen x + \cos x = \sec x$

55) $\left(1 - sen^2\theta\right)\left(1 + \tan^2\theta\right) = 1$

56) $\dfrac{sen\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

57) $\dfrac{\cos\theta}{1 + sen\theta} = \dfrac{1 - sen\theta}{\cos\theta}$

58) $\dfrac{\tan\theta - sen\theta}{sen^3\theta} = \dfrac{\sec\theta}{1 + \cos\theta}$

59) $\dfrac{1}{1 + sen\theta} + \dfrac{1}{1 - sen\theta} = 2\sec^2\theta$

60) $\dfrac{1 + \sec\theta}{sen\theta + \tan\theta} = \csc\theta$

61) $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{sen 2\theta} = \tan\theta$

62) $\dfrac{1 - sen^2\theta + \cos^2\theta}{sen 2\theta \cos\theta} = \csc\theta$

63) $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2sen^2 x$

64) $\left(1 - sen\theta\right)\left(1 + sen\theta\right) = \cos^2 x$

65) $\sec^2\theta \csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

66) $\dfrac{\cos x}{1 - sen x} - \dfrac{1 - sen x}{\cos x} = 2\tan x$

67) $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = -\cos 2x$

68) $2\tan x \csc(2x) = \sec^2 x$

69) $sen(x + y)\, sen(x - y) = sen^2 x - sen^2 y$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

70) $sen(x+y)+sen(x-y)=2senx\cos y$

71) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

72) $\dfrac{sen^2(2x)}{(1+\cos(2x))^2}=\sec^2 x-1$

73) $\dfrac{sen(2x)}{(1+\cos(2x))}=\tan x$

74) $\sec\alpha-\cos\alpha=sen\alpha\ \tan\alpha$

75) $ctgx+\sec^2 x-\tan^2 x=\dfrac{1+\tan x}{\tan x}$

76) $\dfrac{\sec^4 x-\tan^4 x}{1+2\tan^2 x}=1$

77) $\cos^4 x+1-sen^4 x=2\cos^2 x$

78) $\dfrac{1}{2}(\cot x-\tan x)=\cot(2x)$

79) $\dfrac{senx}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}=1$

80) $(\tan\theta-\sec\theta)^2=\dfrac{1-sen\theta}{1+sen\theta}$

81) $\cos 2x=\cos^4 x-sen^4 x$

82) $\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}=\cot(2x)$

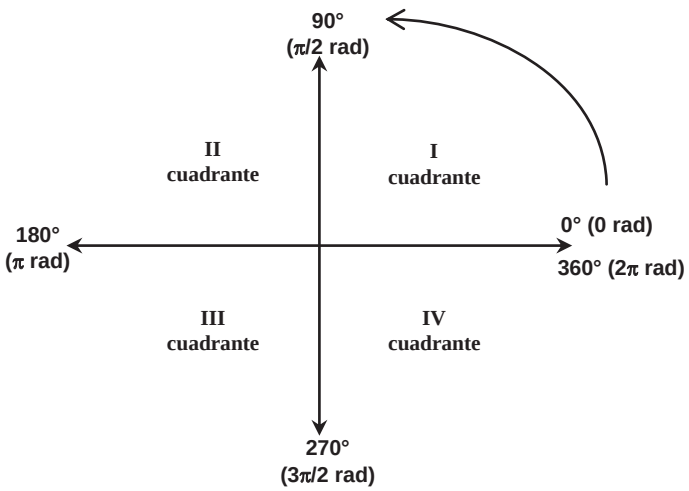
83) $(\tan\theta-\sec\theta)^2=\dfrac{1-sen\theta}{1+sen\theta}$

84) $\dfrac{(sena+\cos a)^2-1}{\cot a-sena\cos a}=2\tan^2 a$

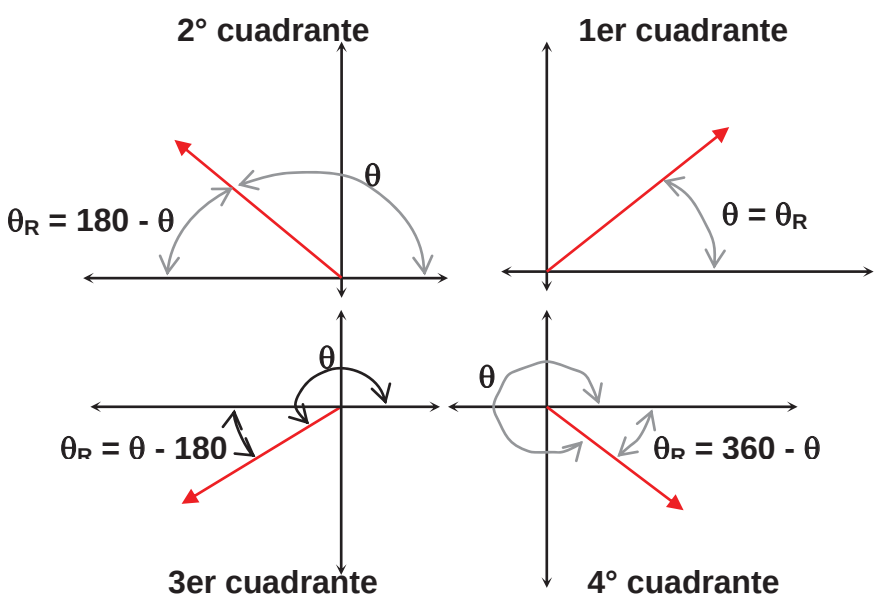
® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

4.6 Círculo trigonométrico.

Los valores de las 6 funciones trigonométricas tienen signos diferentes según el cuadrante donde está el lado terminal del respectivo ángulo.
Recordemos la formación del CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO:



Definición de ángulo de referencia: Todo ángulo θ tiene un ángulo de referencia θ_R, el cual es un **ángulo agudo** formado entre el **lado terminal de** θ y el **eje x**. Es decir:



Los valores de las seis funciones trigonométricas tienen signos diferentes según el cuadrante donde está el lado terminal del respectivo ángulo. Este signo se determina según los signos de las componentes x y y, y según la definición de cada función trigonométrica. Así por ejemplo:

- 1er cuadrante: $x = (+)$ y $y = (+) \Rightarrow r = (+)$
- 2do cuadrante: $x = (-)$ y $y = (+) \Rightarrow r = (+)$
- 3er cuadrante: $x = (-)$ y $y = (-) \Rightarrow r = (+)$
- 4to cuadrante: $x = (+)$ y $y = (-) \Rightarrow r = (+)$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Note que en todos los casos, el valor de la hipotenusa r es positivo. En cada cuadrante las funciones trigonométricas positivas son las siguientes:

II CUADRANTE x = (-), y = (+) , r = (+) SEN (CSC)	**I CUADRANTE** x = (+), y = (+) , r = (+) TODAS
III CUADRANTE x = (+), y = (+) , r = (+) TAN (COT)	**IV CUADRANTE** x = (+), y = (+) , r = (+) COS (SEC)

De acuerdo al cuadrante así será el signo de la función:

- I todos positivos.
- II seno y cosecante positivos.
- III tangente y cotangente positivos
- IV coseno y secante positivos

"TODOS SENTIMOS TANTAS COSITAS"

Ejemplo 14: Calcule θ tal que: $\cos\theta = -0.5$ y $\tan\theta > 0$

$\cos\theta = -0.5 \rightarrow$ II y III cuadrantes

$\tan\theta > 0 \rightarrow$ I y III cuadrantes

$\}$ θ en III cuadrante

$\cos\theta = -0.5$

$\theta_R = 120° \rightarrow \theta = 360 - \theta_R = 360 - 120° \rightarrow$ **$\theta = 240°$**

Ejemplo 15: Calcule θ tal que: $\cot\theta = -0.523676$ y $\sec\theta < 0$

$\cot\theta = -0.523676 \rightarrow$ II y IV cuadrantes

$\sec\theta < 0 \rightarrow$ II y III cuadrantes

$\}$ θ en II cuadrante

$\cot\theta = 1 / \tan\theta = -0.523676$

$\tan\theta = -1.909578$

$\theta_R = -62.36° \rightarrow \theta = 180 - \theta_R = 180 - 62.36° \rightarrow$ **$\theta = 117.64°$**

Ejemplo 16: Calcule $\csc\theta$ tal que: $\cot\theta = -0.523676$ y $\sec\theta < 0$:

$\cot\theta = ½ \rightarrow$ I y III cuad.

$\sen\theta > 0 \rightarrow$ I y II cuad.

$\}$ θ en I cuadrante

$\cot\theta = 1 / \tan\theta = 0.5$

$\tan\theta = 2.0$

$\theta_R = 63.43° \rightarrow \theta = \theta_R$

$\rightarrow \csc\theta = 1 / \sen\theta = 1 / \sen 63.43° \rightarrow$ **$\csc\theta = 1.12$**

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

Para las expresiones indicadas, calcule el valor del ángulo (en grados sexagesimales) que cumplen las condiciones indicadas.

85) $ctg\,\theta = -0.523676 \qquad \sec\theta < 0$
$R/ \quad \theta = 117\ .64^o$

86) $\tan\theta = -\sqrt{3} \quad sen\,\theta < 0$
$R/\theta = 300^o$

87) $\cos x = -1/2 \qquad \tan x > 0$
$x = 240^o$

88) $\cos x = -0.9537 \qquad \tan x > 0$
$x = 197.5^o$

89) $\sec x = 1.5 \qquad \tan x < 0$
$x = 311.81^o$

90) $\cot x = -2.1445 \qquad senx < 0 \quad calcule \quad \sec x \qquad R/\sec x = 1.1$

91) $\cot x = -2.3 \qquad senx < 0 \quad calcule \quad \sec x \qquad R/\sec x = 1.09$

92) $\cot x = -0.523676 \qquad \sec x < 0 \quad calcule\ senx \qquad R/senx = 0.8858$

93) $\cot x = \dfrac{1}{2} \qquad senx > 0 \quad calcule\ \csc x, \tan x \qquad R/\csc x = 1.12\ y\ \tan x = 2$

94) $\cot x = -0.8098 \qquad \csc x < 0 \quad calcule\ senx \qquad R/senx = -0.78$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

4.7 Ecuaciones trigonométricas.

Las ecuaciones trigonométricas tienen la particularidad de que la incógnita está relacionada con un ángulo. Este ángulo se puede escribir en grados o en radianes.

Los métodos para resolver una ecuación trigonométrica son similares a los utilizados para resolver ecuaciones algebraicas. Igual que en la verificación de identidades trigonométricas, con frecuencia se requiere el uso de algunas propiedades trigonométricas.

Ejemplo 17: Resuelva la ecuación $2\cdot\cos\theta + \sqrt{2} = 0$

$\cos\theta = -\sqrt{2}/2$ → II y III cuadrantes

$\theta = \cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$

$\theta = 135°$ → $\theta_{II} = 135°$

→ $\theta_{III} = 360° - 135° = 225°$

Finalmente: **$\theta = 135°, 225°$**

Ejemplo 18: Resuelva la ecuación: $4\cdot\cos^2\theta - 3 = 0$

$\cos^2\theta = ¾$

$\cos\theta = \pm 0.866$ → (+): I y IV / (-): II y III (note que hay coseno (+) y (-))

Para $\cos\theta = 0.866$

$\theta = \cos^{-1}(0.866)$

$\theta = 30°$ → $\theta_I = 30°$

→ $\theta_{IV} = 360° - 30° = 330°$

Para $\cos\theta = -0.866$

$\theta = \cos^{-1}(-0.866)$

$\theta = 150°$ → $\theta_{II} = 150°$

→ $\theta_{III} = 360° - 150° = 210°$

Finalmente: **$\theta = 30°, 150°, 210°$ y $330°$**

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejemplo 19: Resuelva la ecuación: $2\cdot\sin\theta + \cos^2\theta = 7/4$

$2\cdot\sin\theta + 1 - \sin^2\theta - 7/4 = 0$

$\sin^2\theta - 2\cdot\sin\theta + ¾ = 0$

$x^2 - 2x - ¾ = 0 \quad \rightarrow \quad x = \{1.5, 0.5\}$ (note que se usó la sustitución $x = \text{sen}\theta$)

Como $x = \text{sen}\theta$, entonces se evalúan las 2 posibles soluciones tal que:

a) $\sin\theta = 1.5$ (I y II cuadr.) (no tiene solución)	b) $\sin\theta = 0.5$ (I y II cuadr.) $\theta = \sin^{-1}(0.5) = 30°$ $\rightarrow \quad \theta_I = 30°$ $\rightarrow \quad \theta_{II} = 180° - 30° = 150°$

Finalmente: **$\theta = 30°, 150°$**

Ej. 115 Resuelva la ecuación: $2\cdot\cos^2(2\theta) = 3\cdot\cos(2\theta) - 1$

$2\cdot\cos^2(2\theta) - 3\cdot\cos(2\theta) + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$(2x - 1)(x - 1) = 0$ (factorizando)

$(2\cdot\cos2\theta - 1)(\cos2\theta - 1) = 0 \quad \rightarrow$ cualquiera de los 2 factores vale 0:

a) $2\cdot\cos2\theta - 1 = 0$ $\cos2\theta = 1/2$ (I y IV cuadr.) Note la forma de evaluar: **$2\theta = 60° \rightarrow (2\theta)_R = 60°$** $\rightarrow \quad (2\theta)_I = 60° \rightarrow \theta_I = 30°$ $\rightarrow \quad (2\theta)_{IV} = 300° \rightarrow \theta_{IV} = 150°$	b) $\cos2\theta - 1 = 0$ $\cos2\theta = 1$ (I y IV cuadr.) Note la forma de evaluar: **$2\theta = 0° \rightarrow (2\theta)_R = 0°$** $\rightarrow \quad (2\theta)_I = 0° \rightarrow \theta_I = 0°$ $\rightarrow \quad (2\theta)_{IV} = 360° \rightarrow \theta_{IV} = 180°$

Finalmente: **$\theta = 0°, 30°, 150°, 180°$**

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

Resuelva las ecuaciones trigonométricas indicadas.

95) $sen x - 1 = 0 \qquad R/ 90°$

96) $2sen x + \sqrt{3} = 0 \qquad R/ \frac{4\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3}$

97) $2\cos x - 1 = 0 \qquad R/ \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}$

98) $\tan x - \sec^2 x + 3 = 0 \qquad R/ 63^o.43, \ 243^o.43, \ 315^o, 135^o.$

99) $4\cos^2 x - 3 = 0 \qquad R/ 30° \quad 150° \quad 330° \quad 210°$

100) $sen x - 2sen x \cos x = 0 \qquad R/ 0° \quad 60° \quad 180° \quad 300°$

101) $2\cos^2(2x) = 3\cos(2x) - 1 \qquad R/ \quad 30^o, \quad 330^o, \quad 0^o$

102) $\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0 \qquad R/ 0° \quad 180^o, \quad 360^o, \quad 120^o, \quad 300^o.$

103) $sen(2x) - 2\cos x + 2sen x = 2 \qquad R/ \quad 90^o, \quad 180^o$

104) $4 - 6sen^2 x = \cos x \qquad R/ \quad 48^o.2, \quad 311^o.8, \quad 120^o, \quad 240^o.$

105) $2sen^2 x = 1 - sen x \qquad R/ \quad 30^o, \quad 150^o, 270^o.$

106) $2sen^2 x - 1 = sen x \qquad R/ \quad 90^o, \quad 210^o, 330^o.$

107) $2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \qquad R/ 0° \quad 60^o, \quad 300^o, 360^o.$

108) $2\tan x - \sec^2 x = 0 \qquad R/ 45^o, \quad 225^o.$

109) $2sen^3 x + sen^2 x - 2sen x - 1 = 0 \quad R/ \quad 90^o, 270^o, 210^o, 330^o.$

110) $\cos(2x) + 3\cos x + 2 = 0 \qquad R/ \quad 120^o, \quad 240^o \quad 180°$

111) $\cos(2x) = \cos^2 x \qquad R/ \quad 0^o, \quad \pi$

112) $36sen^3 x + 60\, sen^2 x + 25sen x = 0 \qquad R/ \quad 0^o, \quad 180^o \quad 303.6° \quad 236.4°$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

113) $\csc^2 x - \cot x - 1 = 0$ $R/$ 45^o, 225^o $90°$ $270°$

114) $\frac{7}{2}\sec x = -3\tan x + 4\cos x$ $R/$ $8.05^o, 171.95^o, 242.87^o, 297.13^o.$

115) $2\tan x sen x + \tan x - 2 sen x = 1$ $R/$ 45^o, 210^o $225°$ $330°$

116) $\sec x sen^2 x = \tan x$ $R/$ 0^o, 90^o, $180°$

117) $2 sen x \cos^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0$ $R/$ 90^o, 270^o, 120^o, $330^o.$

118) $4\cos^2(x) - 1 = 0$ $R/$ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$ 2π

119) $8\cos^2(x) - 2\cos x = 1$ $R/$ $104.48°; 255.52°; 60°; 300°.$

120) $2\cos^2(x) = 3 sen x$ $R/$ $30°; 150°.$

121) $\cos(2x) + sen^2 x = 1$ $R/$ 0^o, $180^o.$

122) $sen(2x) + sen x = 0$ $R/$ 0^o, 180^o, 120^o, $240°$

123) $sen x \cos(2x) + \cos x sen(2x) = 0$ $R/ 240°$ 300^o, $0^o, 180^o$, $60°$ $120°$

124) $sen x \tan x = sen x$ $R/ \frac{\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ $0°$ π

125) $\tan^4 x - 5\tan^2 x + 4 = 0$ $R/ 45°$ 225^o, $315^o, 135^o$ $63.43°$ $243{,}43°$ $296{,}57°$ $116{,}57°.$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

5. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Cuando se habla de límites en cualquier fenómeno social o científico, se refiere a valores máximos o mínimos en el tiempo. Imaginemos por ejemplo estas 2 situaciones:

1. Sabemos que al aumentar la temperatura, un cuerpo se dilata, pero alcanzará una temperatura límite, posterior a la cual el cuerpo probablemente se derrita.
2. También sucede que cuando disminuye la temperatura, un cuerpo se contrae, pero esto no sucede en forma indefinida, sino que alcanza un límite de contracción, hasta que está totalmente solidificado o cristalizado.

En otras palabras, sabemos que ambos fenómenos tendrán un "límite", que es muy útil en la descripción de funciones con las características anteriormente citadas. Escrito en forma matemática:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ se lee como "el límite de f(x) cuando x tiende a un valor a es L"

Otro concepto importante en el tema de funciones es la continuidad. Gráficamente, es práctico decir que una función es continua si al dibujarla de izquierda a derecha, no hay necesidad de levantar el lápiz. Pero considerando el concepto de límites, una función será continua en a si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

es decir, el límite existe y además es igual al valor de la función cuando $x = a$.

5.1 Interpretación gráfica de límites

Antes de interpretar una gráfica veamos unos conceptos previos de los límites. Iniciemos con un ejemplo que nos ilustrará algunos conceptos.

Ejemplo conceptual: Sea $f(x) = 2x^2 + 1$. ¿Qué pasa cuando x toma valores cercanos a 3?

Con una tabla de valores, evaluamos el comportamiento de la función para valores cercanos a 3, tanto menores como mayores:

x	2.95	2.99	2.999	3.001	3.01	3.05
F(x)	18.405	18.8802	18.9880	19.0120	19.1202	19.605

3

Viajando sobre la recta numérica, me acerco por la izquierda a x=3, es decir, viajo de menor a mayor. De esta forma calculamos el…
Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 19$$

Viajando sobre la recta numérica, me acerco por la derecha a x=3, es decir, viajo de mayor a menor. De esta forma calculamos el…
Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 19$$

Finalmente: $\lim_{x\to 3} (2x^2 + 1) = 19$

En efecto, notemos como cuando x está próximo al 3, $2x^2+1$ está próximo a $2\cdot 3^2+1=19$. Decimos entonces que "el límite de $2x^2+1$, cuando x tiende a 3, es 19" y lo escribimos de la forma indicada anteriormente.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Límites laterales: son aquellos límites que se obtienen al recorrer la función por la izquierda o por la derecha, pero siempre acercándose a un valor x_0 determinado. Matemáticamente:

Límite lateral por la izquierda: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = a$

Límite lateral por la derecha: $\lim_{x\to 3+} f(x) = b$

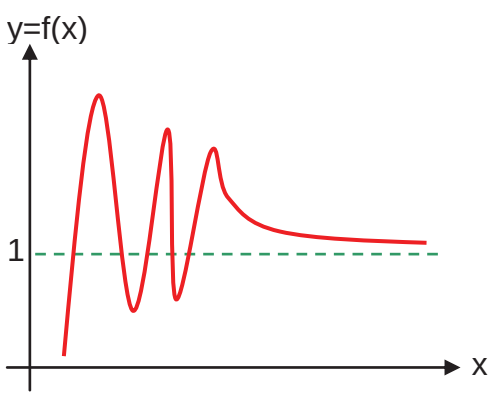
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$$

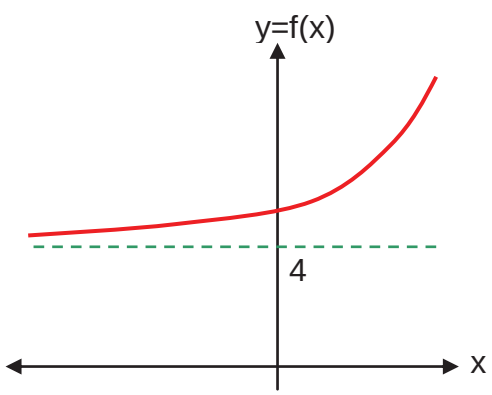
Note que sí los límites laterales para un mismo valor, dan resultados distintos, eso quiere decir que hay una discontinuidad en la gráfica para el punto evaluado, mientras que como se muestra en el ejemplo conceptual, si los límites laterales coinciden en valor, entonces la gráfica es contínua.

Asíntotas: representan una límite de f(x) cuando esta tiende a infinito, o también pueden ser discontinuidades de f(x) debido a valores que la indeterminan.

Asíntota horizontal: pueden ser atravesadas por la función; cortan al *eje y*.

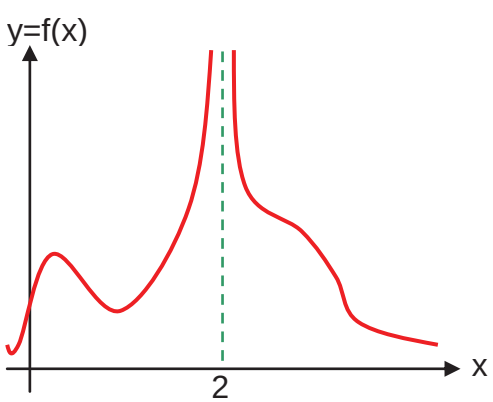
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ → el gráfico de y = f(x) es muy cercano a la recta horizontal y = L.

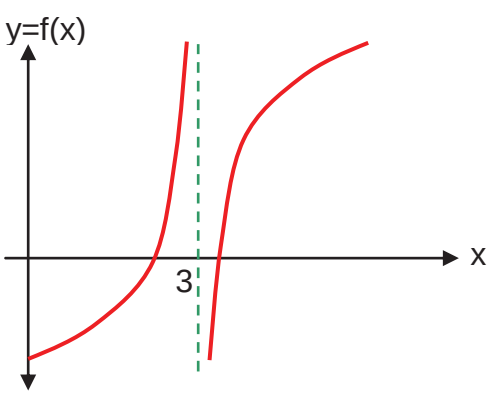




Asíntota vertical: no pueden ser atravesadas por la función, cortan al *eje x*.

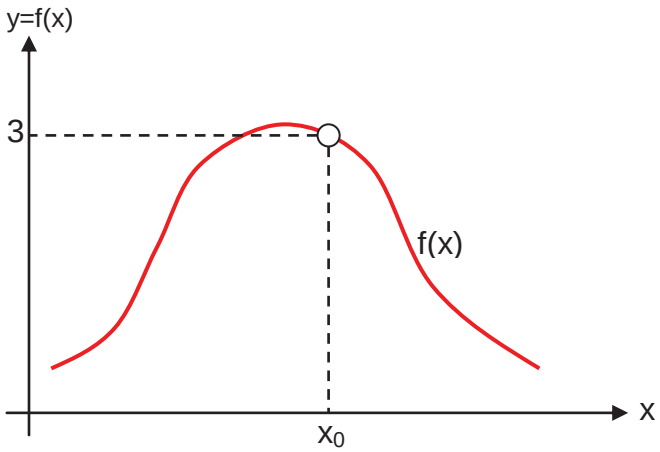
$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ → el gráfico de y = f(x) es muy cercano a la recta vertical y = a.





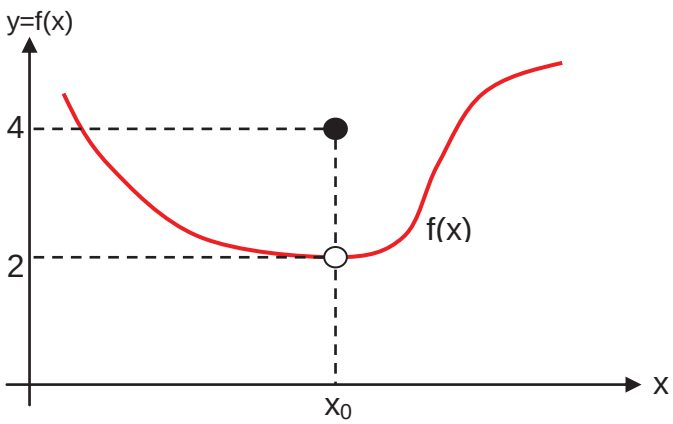
® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Otros conceptos importantes en el análisis de límites gráficos se detallan en las siguientes figuras:



En este caso, f(x) no está definida en x_0, sin embargo

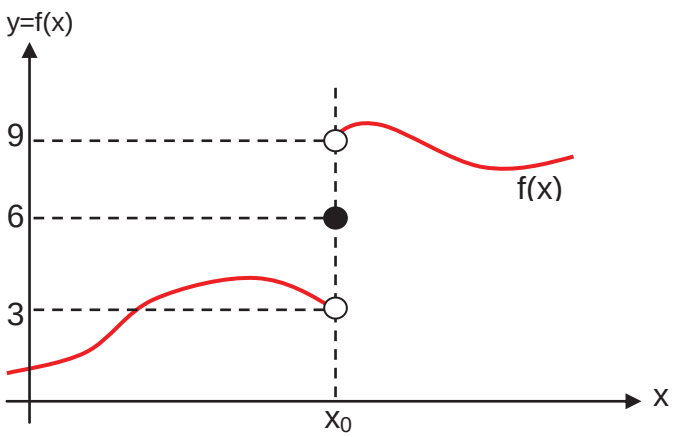
$$\lim_{x \to x0} f(x) = 3$$



En este caso, $f(x_0)=4$, pero

$$\lim_{x \to x0} f(x) = 2 \cdot$$

La función es discontinua. Es decir, el límite de f(x) puede ser diferente al valor de la función, para el mismo punto x_0.



En este caso

$$\lim_{x \to x0} f(x) = \not\in \cdot$$

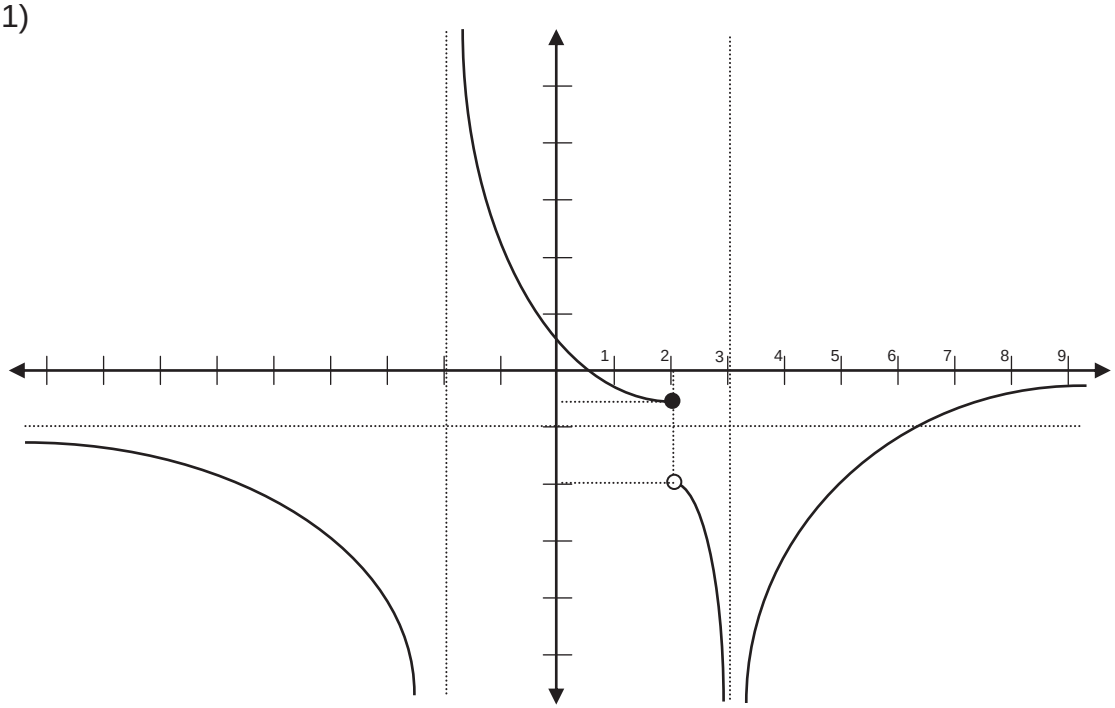
La función es discontinua en x_0, ya que para ese punto, no tiende a un valor único.

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

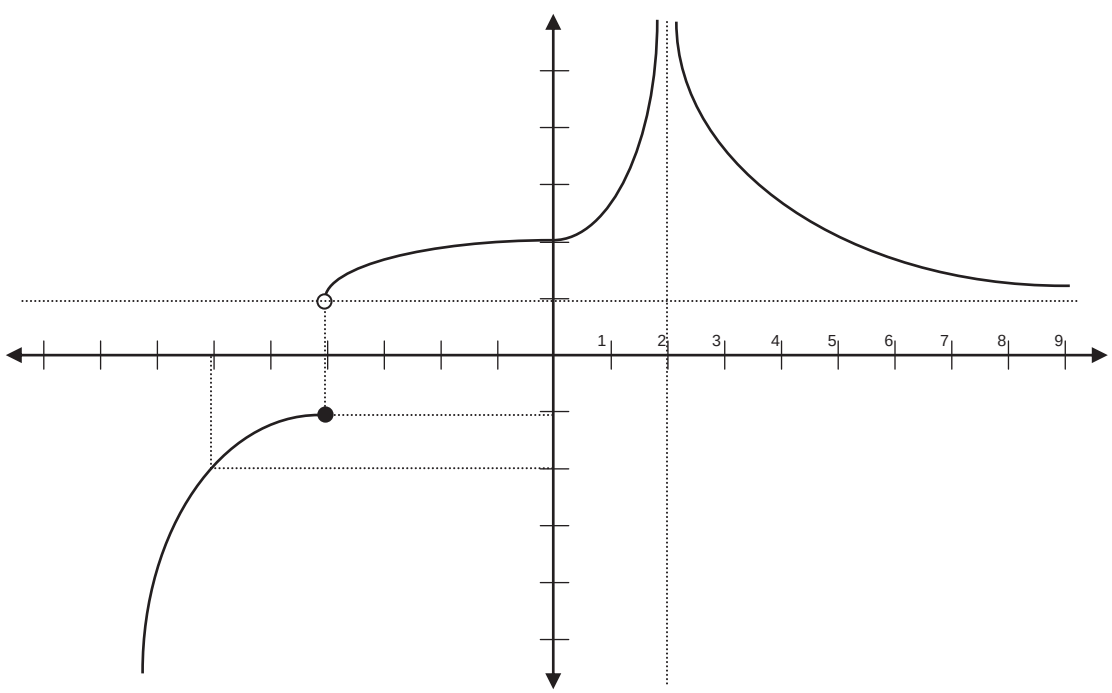
Calcule los límites indicados según la gráfica. Recuerde que debe estudiar detenidamente la gráfica, para entender bien el comportamiento de la función, así como la escala indicada.

1)



A.V.=
A.H.=
$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to2^-} f(x) =$
$\lim_{x\to2} f(x) =$
$\lim_{x\to-2^+} f(x) =$
$\lim_{x\to0} f(x) =$
$\lim_{x\to-2^-} f(x) =$
$\lim_{x\to2^+} f(x) =$
$\lim_{x\to3^-} f(x) =$
$\lim_{x\to3^+} f(x) =$

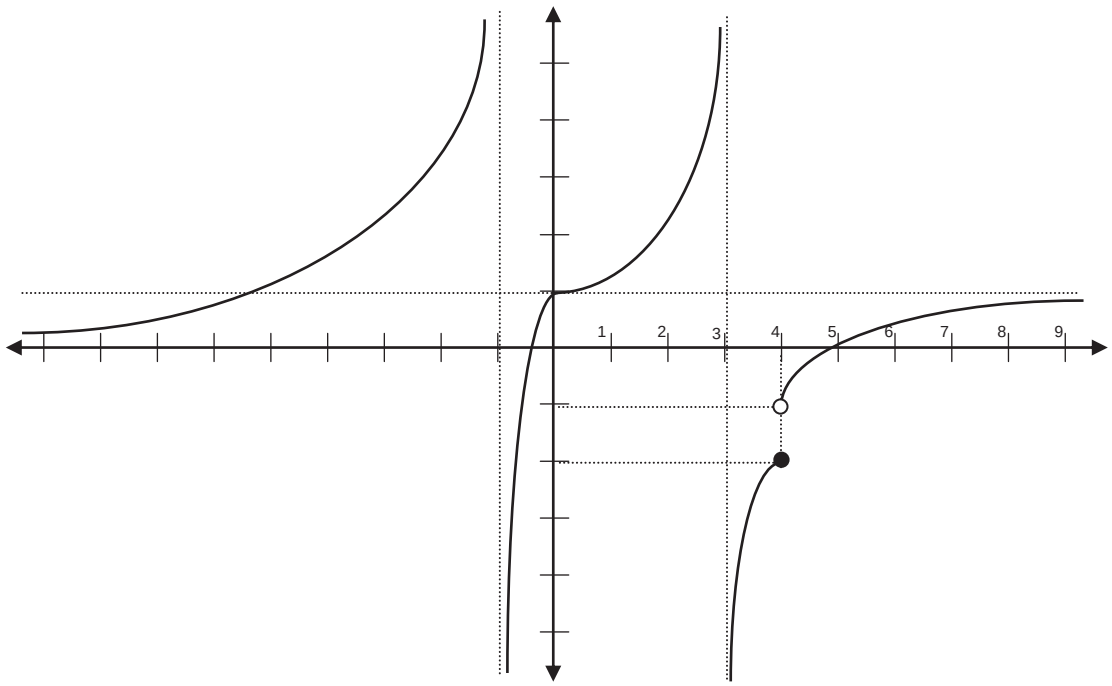
2)



A.V.=
A.H.=
$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to-4^-} f(x) =$
$\lim_{x\to2^-} f(x) =$
$\lim_{x\to-4^+} f(x) =$
$\lim_{x\to0} f(x) =$
$\lim_{x\to2^+} f(x) =$
$\lim_{x\to-6} f(x) =$
$\lim_{x\to-4} f(x) =$
$\lim_{x\to2} f(x) =$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

3)



A.V.=

A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to3^-} f(x) =$

$\lim_{x\to3^+} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to0} f(x) =$

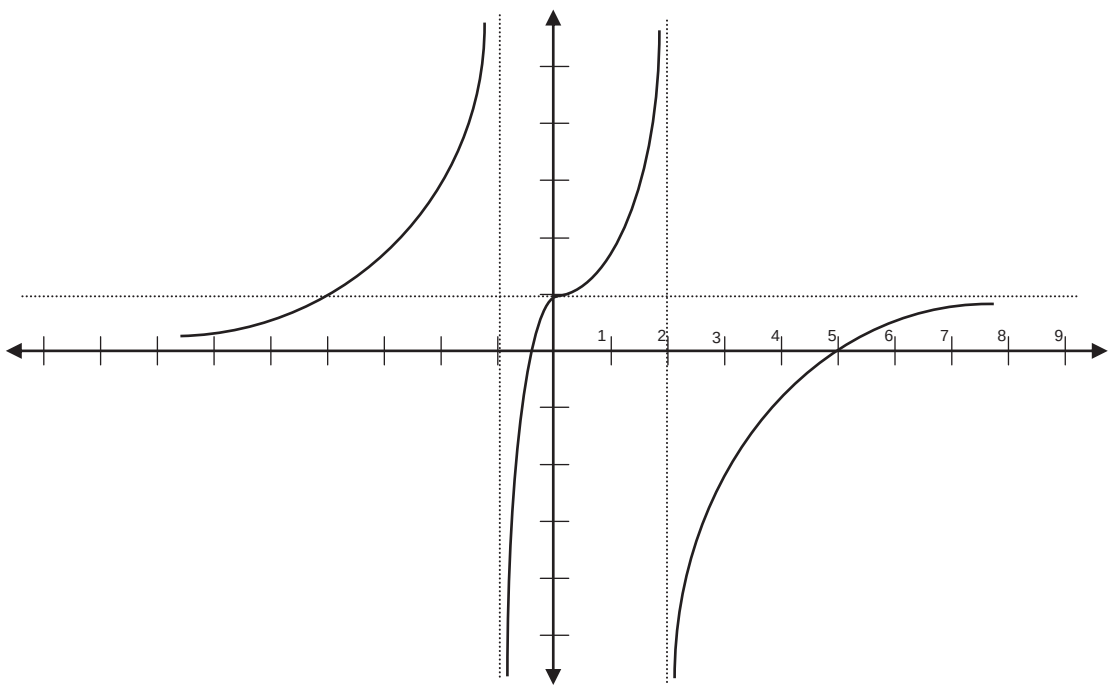
$\lim_{x\to4} f(x) =$

$\lim_{x\to4^+} f(x) =$

$\lim_{x\to4^-} f(x) =$

$\lim_{x\to5} f(x) =$

4)



A.V.=

A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to-4} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to0} f(x) =$

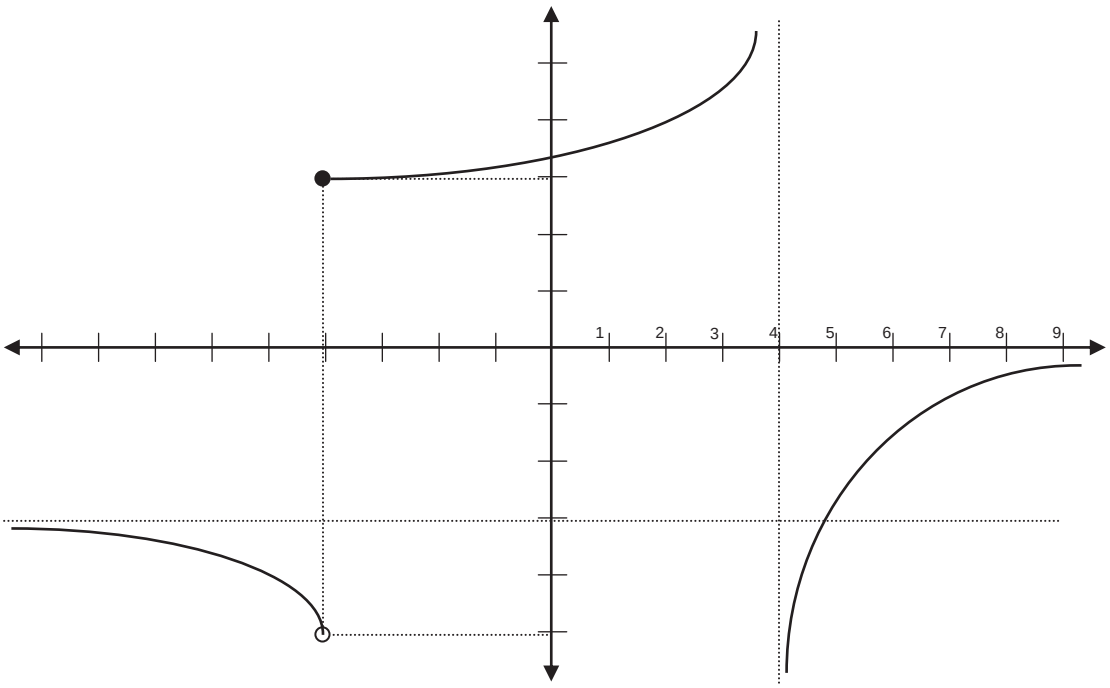
$\lim_{x\to2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to-1} f(x) =$

$\lim_{x\to5} f(x) =$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

5)



A.V.=

A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) =$

$\lim_{x\to -4^-} f(x) =$

$\lim_{x\to -4^+} f(x) =$

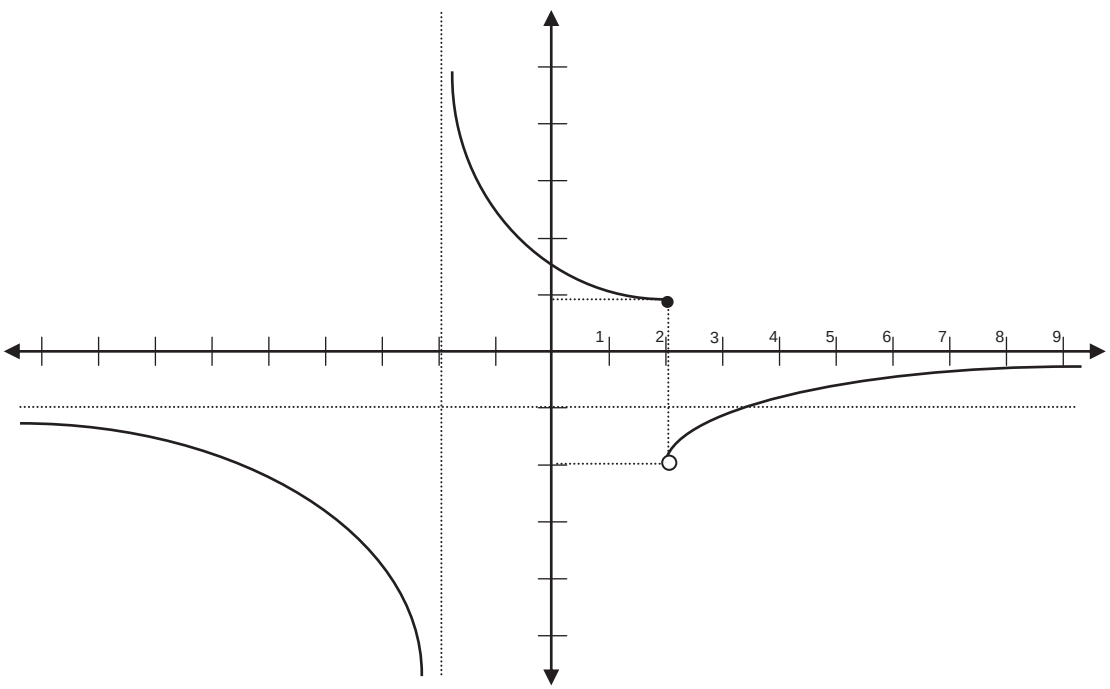
$\lim_{x\to -4} f(x) =$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 4} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

6)



A.V.=

A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

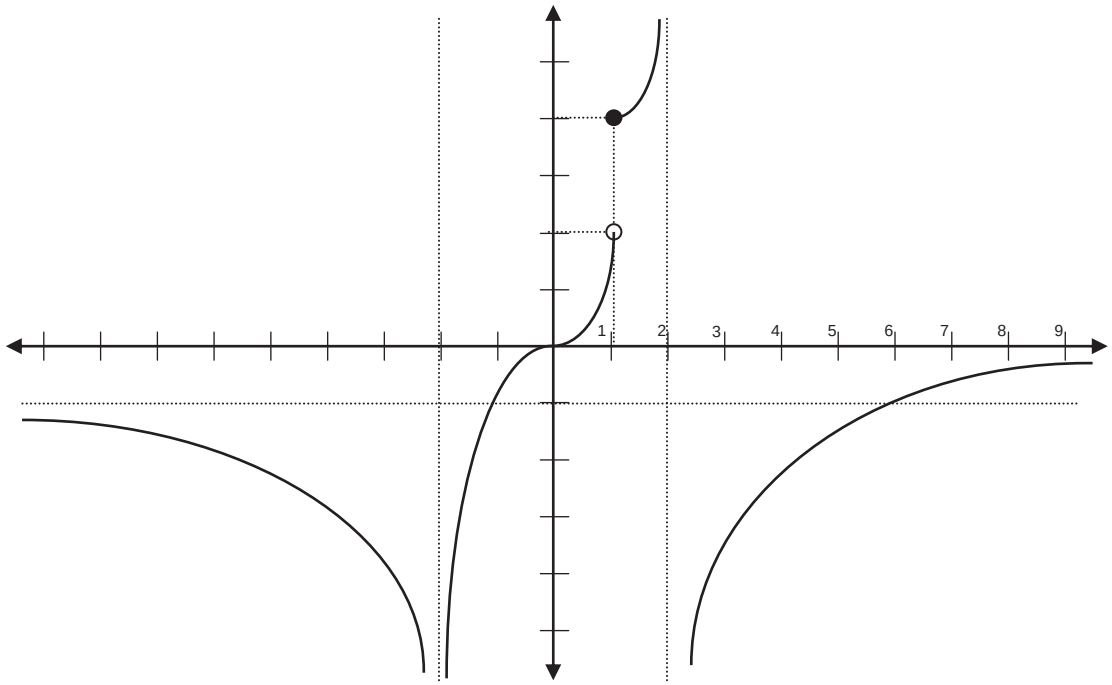
$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -1} f(x) =$

$\lim_{x\to 6} f(x) =$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

7)



A.V.=
A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

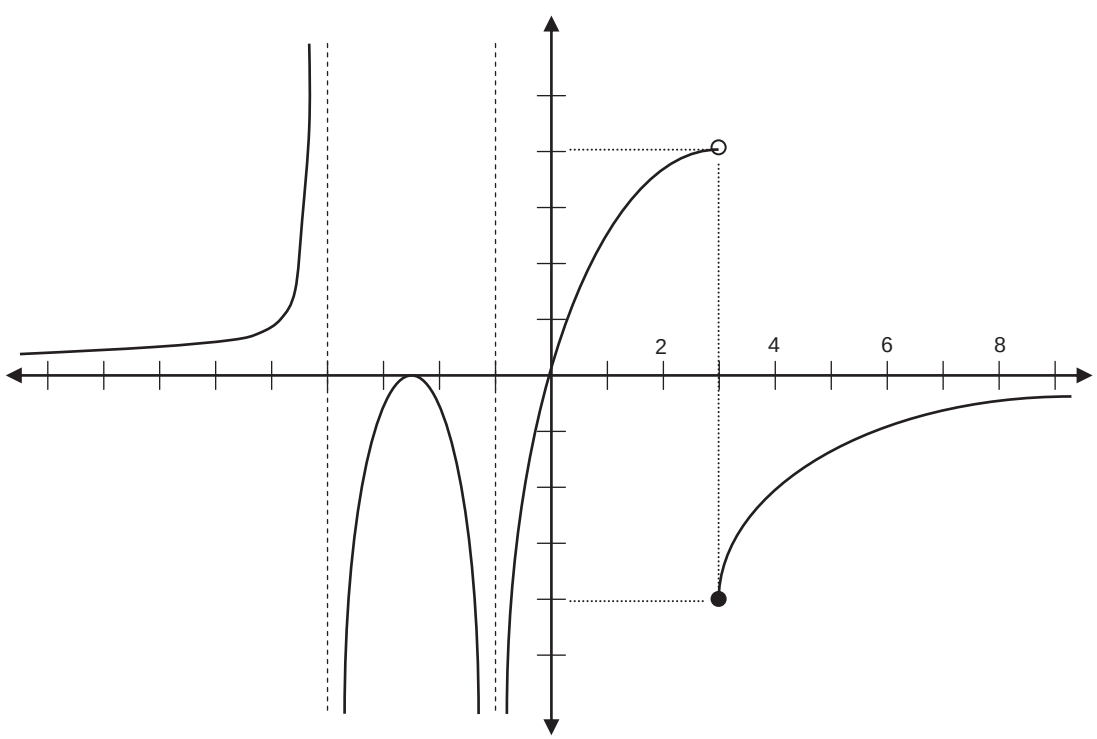
$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 1} f(x) =$

$\lim_{x\to 6} f(x) =$

8)



A.V.=
A.H.=

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -1} f(x) =$

$\lim_{x\to 6} f(x) =$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

5.2 Interpretación analítica de límites

Para interpretar analíticamente un límite, $\lim_{x \to x0} f(x)$, se procede de la siguiente forma:

1. Se sustituye el valor de x_0 en la expresión de f(x)
2. Si la expresión no se indefine, el valor obtenido es el valor buscado del límite.
3. Si la expresión se indefine, se reacomoda o factoriza la expresión (usando fórmulas notables o división sintética) para evitar la indefinición. Es decir, el proceso de factorización y el de racionalización se aplican para eliminar el factor que está causando que la función se indefina.
4. La nueva expresión de la función se vuelve a probar con el valor de x, y si todavía hay discontinuidad, se repite el proceso de factorización o racionalización, según lo que aplique.

Recordemos que una función se indetermina o se indefine si al sustituir el valor de x, se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad +\infty-\infty$$

LIMITES POR FACTORIZACIÓN

A continuación se indican 4 ejemplos para ver el caso de factorización.

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

$$\lim_{x\to 2} x+2=4$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

$$3)\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}=\frac{0}{0}$$

$$x^2-5x+4 \Big/ _{x-4} = x-1$$

$$x^2-2x-8 \Big/ _{x-4} = x+2$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}=\frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{6}$$

$$4)\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2+16x-12}=\frac{0}{0}$$

$$x^3-3x^2+4 \Big/ _{x-2} = x^2-x-2$$

$$x^3-7x^2+16x-12 \Big/ _{x-2} = x^2-5x+6$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2+16x-12}=\frac{x^2-x-2}{x^3-x^2-5x+6}$$

$$x^2-x-2 \Big/ _{x-2} = x+1$$

$$x^3-x^2-5x+6 \Big/ _{x-2} = x-3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2+16x-12}=Lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3}=\frac{3}{-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3}=\frac{3}{-1}=-3$$

$$5)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\frac{0}{0}$$

$$x^2-6x+9 \Big/ _{x-3} = x-3$$

$$x^3-7x^2+15-9 \Big/ _{x-3} = x^2-4x+3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\frac{x-3}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}$$

$$x^2-4x+3 \Big/ _{x-3} = x-1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

Calcule los límites indicados.

9) $\lim_{x\to 13} \frac{x^3-9x^2-45x-91}{x-13}$ $R/228$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ R/ 1/2

11) $\lim_{x\to 1} \frac{10x^3-26x^2+22x-6}{x^2-2x+1}$ $R/4$

12) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4+x^2-20}{\frac{x}{2}+1}$ $R/-72$

13) $\lim_{x\to -3} \frac{x^4+2x^3-2x^2-9}{x^3+27}$ $R/\frac{-42}{27}$

14) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$ $R/-1$

15) $\lim_{x\to -2} \frac{x^8-17x^4+16}{x^4-11x^2-18x-8}$ R/ 80

16) $\lim_{x\to -3} \frac{x^4+2x^3-2x^2-9}{x^3+27}$ $R/\frac{-42}{27}$

17) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}-\frac{6}{x^2+2x-8}$ $R/\frac{1}{6}$

18) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}$ $R/\frac{1}{3}$

19) $\lim_{x\to -5} \frac{x^4+125x}{x^2-25}$ $R/\frac{75}{2}$

20) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x}{x^2+3x+2}$ $R/2$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

21) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-7x^3+5x^2+31x-30}{x^2-1}$ $R/12$

22) $\lim_{x\to -1/2}\dfrac{4x^2-1}{8x^3+1}$ $R/\dfrac{-2}{3}$

LIMITES POR RACIONALIZACIÓN

Si el denominador contiene dos términos uno de los cuales, o ambos, son raíces cuadradas. Se racionaliza para eliminar la raíz del denominador. Para esto se usa la formula de diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$$

Ejemplo 6:

Se tiene la fracción:	$\dfrac{x}{2+\sqrt{x}}$
Se multiplica y divide por el conjugado del denominador:	$\dfrac{x}{2+\sqrt{x}}\ \dfrac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$
Se multiplican los términos y se obtiene:	$\dfrac{2x-x\sqrt{x}}{4-x}$

Ejemplo 7:

Evaluar el siguiente límite: $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{8+1}-3}{\sqrt{4-2}-\sqrt{2}}=\dfrac{3-3}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{0}{0}$

Al sustituir directamente x por 4, se llega a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Para tratar de eliminar la indeterminación, se multiplica numerador y denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador y del numerador. Así:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1})^2-3^2}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-(\sqrt{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{x-2-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$\lim_{x\to 4}2\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to 4}2\cdot\frac{\sqrt{4-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+1}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{4\sqrt{2}}{3+3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 8:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)\sqrt{x}+\sqrt{2}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejemplo 9:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Racionalización doble

Cuando es necesario eliminar la raíz del numerador y del denominador, hacemos la racionalización doble, multiplicando por ambos complementos.

Ejemplo 10:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x})^2-3^2}{(\sqrt{x})^2-2^2}\cdot=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{x-4}$$

.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4}\cdot=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{x-4}\cdot=\lim_{x\to 4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{4}+2)}{(\sqrt{1+8}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 11:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-\sqrt{xa^3}}{\sqrt{ax}-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-\sqrt{xa^3}}{\sqrt{ax}-a}\cdot\frac{x^2+\sqrt{xa^3}}{x^2+\sqrt{xa^3}}\cdot\frac{\sqrt{ax}+a}{\sqrt{ax}+a}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^2)^2-(\sqrt{xa^3})^2}{(\sqrt{ax})^2-a^2}\frac{\sqrt{ax}+a}{x^2+\sqrt{xa^3}}=\lim_{x\to a}\frac{x^4-xa^3}{ax-a^2}\frac{\sqrt{ax}+a}{x^2+\sqrt{xa^3}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x(x^3-a^3)}{a(x-a)}\frac{\sqrt{ax}+a}{x^2+\sqrt{xa^3}}=\lim_{x\to a}\frac{x(x-a)\left(x^2+ax+a^2\right)}{a(x-a)}\frac{\sqrt{ax}+a}{x^2+\sqrt{xa^3}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x\left(x^2+ax+a^2\right)}{a}\frac{\sqrt{ax}+a}{x^2+\sqrt{xa^3}}=\lim_{x\to a}\frac{a\left(a^2+aa+a^2\right)}{a}\frac{\sqrt{aa}+a}{a^2+\sqrt{aa^3}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a\left(3a^2\right)}{a}\frac{a+a}{a^2+a^2}=\lim_{x\to a}\frac{3a^3}{a}\frac{2a}{2a^2}=3a$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{x^2-\sqrt{xa^3}}{\sqrt{ax}-a}=3a}$$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Ejercicios de práctica

Calcule los límites indicados.

23) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{4-\sqrt{16+x}}$ $R/-8$

24) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ $R/\frac{1}{6}$

25) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ $R/\frac{\sqrt{3}}{6}$

26) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ $R/\frac{1}{2}$

27) $\lim_{x\to 0} \frac{7-\sqrt{49+x}}{3-\sqrt{9+x}}$ $R/\frac{3}{7}$

28) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{9+x}}-\frac{1}{3}}{x}$ $R/\frac{-1}{54}$

29) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $R/3$

30) $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ $R/6$

31) $\lim_{x\to 0} \frac{9-\sqrt{81+x}}{\sqrt{x+25}-5}$ $R/\frac{-5}{9}$

32) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{10x-4}-2\sqrt{5x-6}}{3\sqrt{x-1}-\sqrt{5x-1}}$ $R/\frac{-15}{8}$

33) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{x}$ $R/1$

34) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2}}{x}$ $R/\frac{-1}{16}$

® Derechos reservados. Prohibida su reproducción parcial o total

Este libro ayuda al estudiante de Ingeniería y Administración a comprender los conceptos fundamentales que necesitará a lo largo de su carrera universitaria. Asimismo, ofrece gran cantidad de problemas con respuesta que lo ayudarán en su proceso de aprendizaje.

Los autores han procurado presentar el material de una manera amigable para el estudiante, en un lenguaje sencillo y con ejemplos que ilustran los contenidos y facilitan su comprensión.

ISBN: 978-9930-9447-3-8